模糊值测度论

张广全 著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内容简介

该书系统地论述了作者近几年来在模糊数和模糊测度等方面的研究成果，并且初步建立了模糊值测度论的框架. 全书分三部分共 10 章，第一部分讨论模糊集合与模糊数的模糊极限的基本理论；第二部分讨论模糊集合上的模糊值测度的性质、扩张、分解、弱收敛，以及模糊值可测函数序列的收敛和模糊积分性质；第三部分讨论模糊值模糊测度的渐近结构特征、扩张及模糊值模糊可测函数序列的各种收敛性和模糊值模糊积分序列收敛，最后讨论模糊值模糊积分定义模糊值模糊测度的遗传性.

本书供从事模糊数学理论与应用研究的专业人员阅读，可作为模糊数学方向及相关专业的高年级大学生、研究生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊值测度论/张广全著. —北京：清华大学出版社，1997
ISBN 7-302-02749-8

Ⅰ. 模…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 模糊集-测度论　Ⅳ. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 25500 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
　　　　因特网地址：www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：魏荣桥
印刷者：北京市清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：14.5　字数：376 千字
版　次：1998 年 4 月 第 1 版　1998 年 4 月 第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02749-8/O・189
印　数：0001～2000
定　价：22.80 元

目　录

第一部分　模糊集合与模糊数

第二部分　模糊值测度与模糊值积分

第三部分 模糊值模糊测度与模糊值模糊积分

第 一 部 分

模糊集合与模糊数

第1章 模糊集合

1.1 模糊集合的定义与运算

1.1.1 经典集合与特征函数

集合论是现代数学的基础，集合可以表现概念.

当我们讨论一个具体问题时，总是将自己讨论的对象限制在一个特殊的范围内．称这个特殊的范围为**基本集合**或**论域**，记为 X，X 中的一部分称为 X 中的**子集**，记为 A、B、C、…. 称 X 中的对象为**元素**，记为 x. 如果 x **属于** A，记为 $x\in A$. 如果 x **不属于** A，记为 $x\notin A$，以 $\varnothing$ 表示**空集**，X 表示**全集**.

设 p 是任意给定的一个性质，$p(x)$表示“x 具有性质 p”，则

$$A = \{x; p(x)\}.$$

表示 X 中具有性质 p 的全体元素构成的子集.

设 A、B 是 X 中的两个子集. 如果 $x\in A$ 时必有 $x\in B$，称 A **含于** B，或 B **包含** A，记为 $A\subset B$. 显然，包含关系具有以下性质：

(1) 自反性：$A\subset A$；

(2) 对称性：如果 $A\subset B$，$B\subset A$，则 $A=B$；

(3) 传递性：如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

设 X 是论域，记

$$\mathscr{P}(X) = \{A;, A\subset X\},$$

称 $\mathscr{P}(X)$为 X 的**幂集**，约定$\varnothing$、$X\in\mathscr{P}(X)$.

设 A，$B\in\mathscr{P}(X)$，记

$$A\cup B = \{x; x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$
$$A^c = \{x; x \in X \text{ 且 } x \notin A\},$$
$A \cup B$ 与 $A \cap B$ 分别称为 A 与 B 的**并集**与**交集**，A^c 称为 A 的**补集**. 显然，$(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, c)$ 具有以下性质：

(1) 封闭性：$A \cup B, A \cap B, A^c \in \mathscr{P}(X)$；

(2) 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

(3) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

(4) 单位元存在性：$A \cup \varnothing = A, A \cap X = A$；

(5) 互补律：$A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing$；

(6) 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$；

(7) 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(8) 幂等律：$A \cup A = A, A \cap A = A$；

(9) 两极律：$A \cup X = X, A \cap \varnothing = \varnothing$；

(10) 对合律：$(A^c)^c = A$；

(11) 对偶律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

如果 $B_t \in \mathscr{P}(X)$ ($t \in T$，T 是一个任意指标集)，(7)和(11)有下面的更一般的形式：

(7′) $A \cup (\bigcap_{t \in T} B_t) = \bigcap_{t \in T} (A \cup B_t), A \cap (\bigcup_{t \in T} B_t) = \bigcup_{t \in T} (A \cap B_t)$；

(11′) $(\bigcup_{t \in T} B_t)^c = \bigcap_{t \in T} B_t^c, (\bigcap_{t \in T} B_t)^c = \bigcup_{t \in T} B_t^c$，

其中

$\bigcup_{t \in T} B_t = \{x; \text{存在 } t \in T, \text{使得 } x \in B_t\}$，

$\bigcap_{t \in T} B_t = \{x; \text{对于任何 } t \in T, \text{都有 } x \in B_t\}$.

从上面的性质，我们可以看到，在任何集合运算的公式中，将 $\cup$ 与 $\cap$ 互换，公式仍然成立. 这即是集合论中的对偶性原则.

设 $A \in \mathscr{P}(X)$，称

$$A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

为 A 的特征函数. 记

$$\mathscr{F}_0(X)=(A(\cdot);A(\cdot):X\to\{0,1\}).$$

设 $A(\cdot),B(\cdot)\in\mathscr{F}_0(X)$,记

$$A(\cdot)\vee B(\cdot)=\max(A(\cdot),B(\cdot)),$$
$$A(\cdot)\wedge B(\cdot)=\min(A(\cdot),B(\cdot)),$$
$$Ac(\cdot)=1-A(\cdot).$$

容易证明

$$(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,c)\cong(\mathscr{F}_0(X),\vee,\wedge,c).$$

1.1.2 模糊集合的定义

设 X 是经典集合.

定义 1.1.1 设映射 $\mu_{\tilde{A}}:X\to[0,1]$,$x\mapsto\mu_{\tilde{A}}(x)$. 我们说 $\mu_{\tilde{A}}$ 确定一个 X 的**模糊子集** $\tilde{A}$. $\mu_{\tilde{A}}$称为 $\tilde{A}$ 的**隶属函数**,$\mu_{\tilde{A}}(x)$称为 x 对于 $\tilde{A}$ 的**隶属度**. 由于模糊集合是由它的隶属函数唯一确定的,所以,我们用 $\tilde{A}(\cdot)$来代替 $\mu_{\tilde{A}}$.

显然,模糊集合是经典集合的一般化,经典集合就是它的隶属函数的值域是{0,1}的特殊情况,这时的隶属函数就是经典集合的特征函数.

记

$$\mathscr{F}(X)=\{\tilde{A};\tilde{A}:X\to[0,1]\},$$

称 $\mathscr{F}(X)$为 X 的模糊幂集.

例 1.1.1 以人的年龄作为论域,X,L. A. Zadeh 给出"年老" $\tilde{O}$ 与"年青"$\tilde{Y}$ 两个模糊集合,它们的隶属函数分别是

$$\tilde{O}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^2\right]^{-1}, & x>50;\end{cases}$$

$$\widetilde{Y}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<x,\end{cases}$$

图 1.1.1 给出“年老”与“年青”的隶属函数图象．对于“年老”$\widetilde{O}$ 来说，$\widetilde{O}(60)=0.8$，$\widetilde{O}(80)=0.97$，表示 60 岁的年龄属于“年老”的隶属度是 80%，80 岁的年龄属于“年老”的隶属度是 97%．对“年青”$\widetilde{Y}$ 来说，$\widetilde{Y}(60)=0.02$，$\widetilde{Y}(80)=0.0082$．表示 60 岁的年龄属于“年青”的隶属度是 2%，80 岁的年龄属于“年青”的隶属度是 0.82%．故认为 60 岁和 80 岁是比较年老的．而且 80 岁比 60 岁更老．

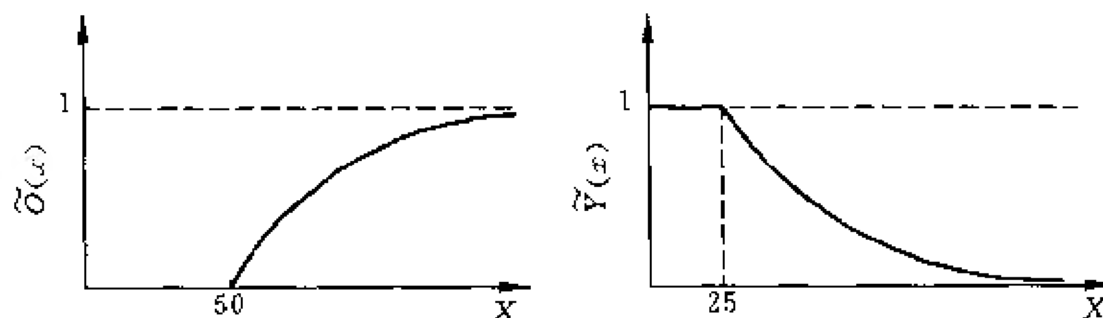


图 1.1.1

当基本论域为 R^1 时，常用下面三种标准函数表示模糊集合的隶属函数．

(1) S 函数（偏大型隶属函数，见图 1.1.2）

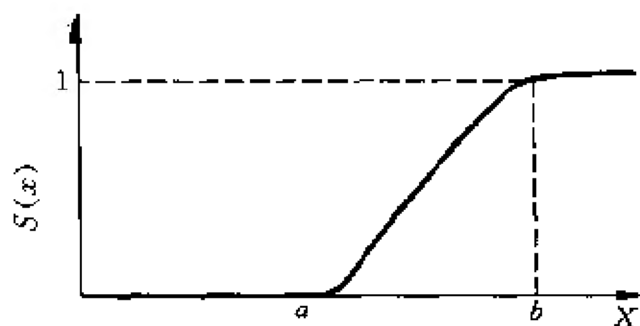


图 1.1.2

$$S(x;a,b)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\leqslant \dfrac{a+b}{2},\\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2, & \dfrac{a+b}{2}<x\leqslant b,\\ 1, & b<x.\end{cases}$$

$S(x;a,b)$是 x 的连续函数，且当 $x=\dfrac{a+b}{2}$时，$S(x;a,b)=\dfrac{1}{2}$. $S(x;a,b)$是 x 的单增函数."年老"$\tilde{O}$ 可以定义为

$$\tilde{O}(x)=S(x;50,80).$$

(2) Z 函数(偏小型隶属函数，见图 1.1.3)

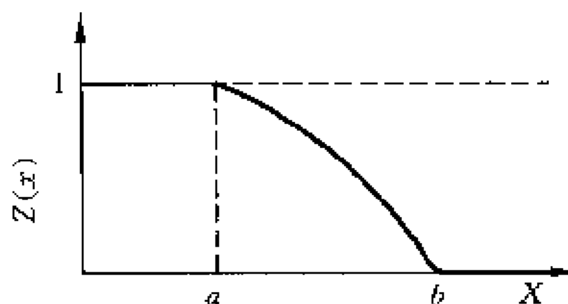


图 1.1.3

$$Z(x;a,b)=1-S(x;a,b),$$

$Z(x;a,b)$是连续的单调减函数，且当 $x=\dfrac{a+b}{2}$时，$Z(x;a,b)=\dfrac{1}{2}$.

"年青"$\tilde{Y}$ 的隶属函数可以表示为：

$$\tilde{Y}(x)=Z(x;25,60).$$

(3) π 函数(中间型隶属函数，见图 1.1.4)

$$\pi(x;a,b)=\begin{cases}S(x;b-a,b), & x\leqslant b,\\ Z(x;b,b+a), & x>b.\end{cases}$$

$\pi(x;a,b)$是 x 的连续函数，且当 $x=b$ 时，$\pi(x;a,b)=1$. 当 $x\leqslant b$ 时，$\pi(x;a,b)$是单调增函数；当 $x\geqslant b$ 时，$\pi(x;a,b)$是单调减函数. $\pi(x;a,b)$是关于 $x=b$ 对称的."中年"$\tilde{M}$ 的隶属函数可以表

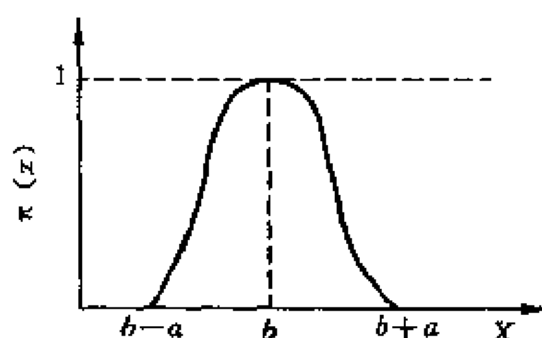


图 1.1.4

示为：

$$\tilde{M}(x)=\pi(x;10,40).$$

模糊集合的表示方法有很多.一般地可以表示为

$$\tilde{A}=\{(x,\tilde{A}(x));x\in X\}.$$

(1) 当 X 是有限集或可数集时，采用 L. A. Zadeh 记法，$\tilde{A}$ 可以写成

$$\tilde{A}=\sum\tilde{A}(x_i)/x_i.$$

(2) 当 X 是有限集时，$\tilde{A}$ 可以写成

$$\tilde{A}=(\tilde{A}(x_1),\tilde{A}(x_2),\cdots,\tilde{A}(x_n)),$$

即将 X 的元素排上次序，将第 k 个元素 x_k 的隶属度 $\tilde{A}(x_k)$ 作为模糊向量 $\tilde{A}$ 的第 k 个分量.

(3) 当 X 是无限不可数集时，Zadeh 记法推广为

$$\tilde{A}=\int_X\tilde{A}(x)/x.$$

注意：此处积分号不表示积分，$\sum$ 也不表示求和，而是表示各个元素与其隶属度的对应关系的总括."/"也不表示除，而是表示在 x 点对应它的隶属度 $\tilde{A}(x)$.

1.1.3 模糊集合的运算及其性质

定义 1.1.2 设 $\tilde{A},\tilde{B}\in\mathscr{F}(X)$. 我们定义：

(1) 如果对于任意的 $x\in X$,有 $\widetilde{A}(x)\leqslant\widetilde{B}(x)$,则称 $\widetilde{A}$ 含于 $\widetilde{B}$,或 $\widetilde{B}$ 包含 $\widetilde{A}$,记为 $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$;

(2) 如果对于任意的 $x\in X$,有 $\widetilde{A}(x)=\widetilde{B}(x)$,则称 $\widetilde{A}$ 等于 $\widetilde{B}$,记为 $\widetilde{A}=\widetilde{B}$;

(3) $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的并记为 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$,其隶属函数为(见图 1.1.5):

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})(x) &= \widetilde{A}(x)\vee\widetilde{B}(x) \\
&= \max(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x));
\end{aligned}
$$

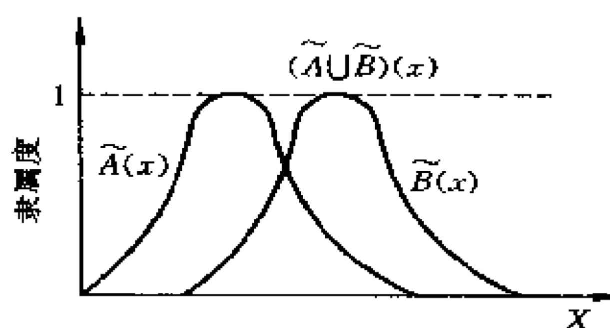


图 1.1.5

(4) $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的交记为 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$,其隶属函数为(见图 1.1.6);

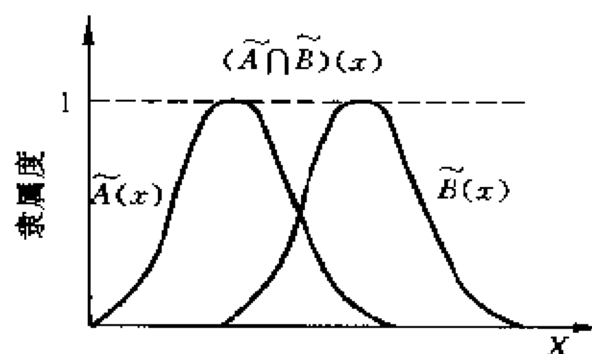


图 1.1.6

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})(x) &= \widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(x) \\
&= \min(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x));
\end{aligned}
$$

(5) $\widetilde{A}$ 的补模糊集合记为 $\widetilde{A}^c$,其隶属函数为(见图 1.1.7):

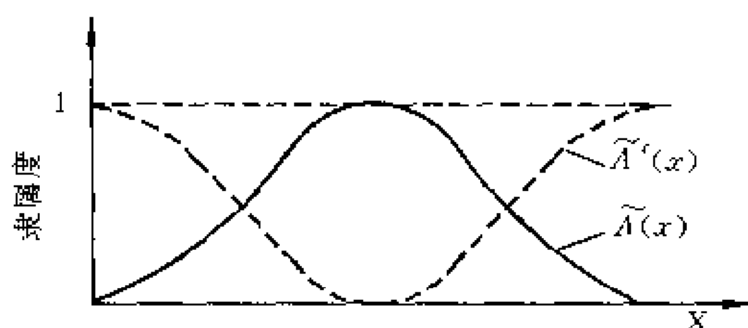


图 1.1.7

$$\widetilde{A}^c(x) = 1 - \widetilde{A}(x).$$

设 T 是任意指标集，如果 $\widetilde{A}_t \in \mathscr{F}(X)$，$(\forall\, t \in T)$，则可以定义模糊集合的任意并与任意交的运算如下：

$$\left(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t\right)(x) = \bigvee_{t\in T}\widetilde{A}_t(x) = \sup_{t\in T}\widetilde{A}_t(x);$$

$$\left(\bigcap_{t\in T}\widetilde{A}_t\right)(x) = \bigwedge_{t\in T}\widetilde{A}_t(x) = \inf_{t\in T}\widetilde{A}_t(x).$$

显然，如果 $\widetilde{A}, \widetilde{A}_t \in \mathscr{F}(X)\,(\forall\, t \in T)$，则 $\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t, \bigcap_{t\in T}\widetilde{A}_t, \widetilde{A}^c \in \mathscr{F}(X)$.

定理 1.1.1 $(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, c)$具有以下性质：

(1) 最大、最小模糊集合存在性：$\varnothing \subset \widetilde{A} \subset X$；

(2) 自反性：$\widetilde{A} \subset \widetilde{A}$；

(3) 对称性：如果 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$，$\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$，则 $\widetilde{A} = \widetilde{B}$；

(4) 传递性：如果 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$，$\widetilde{B} \subset \widetilde{C}$，则 $\widetilde{A} \subset \widetilde{C}$；

(5) 交换律：$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \widetilde{B} \cup \widetilde{A}$，$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \widetilde{B} \cap \widetilde{A}$；

(6) 结合律：$\widetilde{A} \cup (\widetilde{B} \cup \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cup \widetilde{C}$，

$\widetilde{A} \cap (\widetilde{B} \cap \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) \cap \widetilde{C}$；

(7) 分配律：$\widetilde{A} \cup (\widetilde{B} \cap \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap (\widetilde{A} \cup \widetilde{C})$，

$\widetilde{A} \cap (\widetilde{B} \cup \widetilde{C}) = (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{C})$；

(8) 吸收律：$\widetilde{A} \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) = \widetilde{A}$，

$\widetilde{A} \cap (\widetilde{B} \cup \widetilde{A}) = \widetilde{A}$；

(9) 幂等律：$\widetilde{A}\cup\widetilde{A}=\widetilde{A},\widetilde{A}\cap\widetilde{A}=\widetilde{A}$；

(10) 对合律：$(\widetilde{A})^c=\widetilde{A}$；

(11) 两极律：$X\cap A=A,X\cup A=X,$

$\varnothing\cap A=\varnothing,\varnothing\cup A=A$；

(12) 对偶律：$(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})^c=\widetilde{A}^c\cap\widetilde{B}^c,$

$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})^c=\widetilde{A}^c\cup\widetilde{B}^c$.

如果 $\widetilde{A}_t\in\mathscr{F}(X)(t\in T)$，(7)和(12)有更一般的形式：

(7′) $\widetilde{A}\cup(\bigcap\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t)=\bigcap\limits_{t\in T}(\widetilde{A}\cup\widetilde{A}_t)$,

$\widetilde{A}\cap(\bigcup\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t)=\bigcup\limits_{t\in T}(\widetilde{A}\cap\widetilde{A}_t)$；

(12′) $(\bigcap\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t)^c=\bigcap\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t^c$,

$(\bigcap\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t)^c=\bigcup\limits_{t\in T}\widetilde{A}_t^c$.

其中 $\varnothing(x)\equiv 0,X(x)\equiv 1,\forall\ x\in X$.

证明　直接验证即得. 以(7)为例，由于对任意的 $x\in X$，有

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}\cup(\widetilde{B}\cap\widetilde{C}))(x)&=\max(\widetilde{A}(x),(\widetilde{B}\cap\widetilde{C})(x))\\&=\max(\widetilde{A}(x),\min(\widetilde{B}(x),\widetilde{C}(x)))\\&=\min(\max(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x)),\max(\widetilde{A}(x),\widetilde{C}(x)))\\&=\min((\widetilde{A}\cup\widetilde{B})(x),(\widetilde{A}\cup\widetilde{C})(x))\\&=((\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap(\widetilde{A}\cup\widetilde{C}))(x),\end{aligned}$$

则

$$\widetilde{A}\cup(\widetilde{B}\cap\widetilde{C})=(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap(\widetilde{A}\cup\widetilde{C}).$$

同理可证

$$\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}\cup\widetilde{C})=(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}).$$

从上面的性质，可以看到，在任何模糊集合运算的公式中，将$\cup$与$\cap$互换，公式仍然成立，即模糊集合论中保持了经典集合论中的对偶原则. 还可以看到，模糊集合的运算性质保持了经典集合运算的几乎所有性质，只是互补律不成立. 即

$$\widetilde{A}\cup\widetilde{A}^c=X,\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c=\varnothing,$$

一般不再成立.

例 1.1.2 设 $X=[0,1]$, $\widetilde{A}(x)=x$, 则 $\widetilde{A}^c(x)=1-x$,

$$(\widetilde{A}\cup\widetilde{A}^c)(x)=\max(x,1-x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ x, & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$(\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c)(x)=\min(x,1-x)=\begin{cases}x, & x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 1-x, & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

于是, $(\widetilde{A}\cup\widetilde{A}^c)(x)\neq1$, $(\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c)(x)\neq0$. 特别是

$$(\widetilde{A}\cup\widetilde{A}^c)\left(\frac{1}{2}\right)=(\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1.1.3 "年青或年老" $\widetilde{Y}\cup\widetilde{O}$ 的隶属函数为

$$(\widetilde{Y}\cup\widetilde{O})(x)=\widetilde{Y}(x)\vee\widetilde{O}(x)$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant x^*,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & x^*<x,\end{cases}$$

其中 $x^*=\dfrac{1}{2}(75+5\sqrt{29})=50.96291$.

"年青又年老" $\widetilde{Y}\cap\widetilde{O}$ 的隶属函数为

$$(\widetilde{Y}\cap\widetilde{O})(x)=\widetilde{Y}(x)\wedge\widetilde{O}(x)$$

$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant x^*,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & x^*<x.\end{cases}$$

"不年青" $\widetilde{Y}^c$ 的隶属函数为

$$\widetilde{Y}^c(x)=1-\widetilde{Y}(x)$$

$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x.\end{cases}$$

“不年老”$\widetilde{O}^c$ 的隶属函数为

$$\widetilde{O}^c(x)=1-\widetilde{O}(x)$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 50<x.\end{cases}$$

1.2 模糊集合的分解定理与表现定理

1.2.1 模糊集合的截集

一个元素 x 是否属于模糊集合 $\widetilde{A}$，回答是不确切的，如果我们选定一个“阀限”$\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，当 x 对于 $\widetilde{A}$ 的隶属度 $\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda$ 时，便说 $x\in A_\lambda$，否则便说 $x\notin A_\lambda$，于是 x 是否属于 A_λ 的回答将是确切的. 这样便得到一个经典子集 A_λ. 从而导出截集的概念.

定义 1.2.1 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，对任意的 $\lambda\in[0,1]$，记

$$(\widetilde{A})_\lambda=A_\lambda=\{x;\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\},$$

称 A_λ 为 $\widetilde{A}$ 的 **λ-截集**或 **λ 水平集**（见图 1.2.1），λ 称为置信水平. 又记

$$(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{x;\widetilde{A}(x)>\lambda\},$$

称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 $\widetilde{A}$ 的 **λ-强截集**或 **λ 弱水平集**. 称

$$A_{\underset{\cdot}{0}}=\{x;\widetilde{A}(x)>0\}=\mathrm{supp}\widetilde{A}$$

为 $\widetilde{A}$ 的支集. 称 A_1 为 $\widetilde{A}$ 的核，记作 $\mathrm{Ker}\widetilde{A}$. 称 $A_{\underset{\cdot}{0}}-A_1$ 为 $\widetilde{A}$ 的边界（见图 1.2.1）.

A_λ 的直观意义是由那些对模糊集合 $\widetilde{A}$ 的隶属度不小于水平 λ 的元素构成. 它是论域 X 的一个经典子集. 如果 $x\in A_\lambda$，我们称

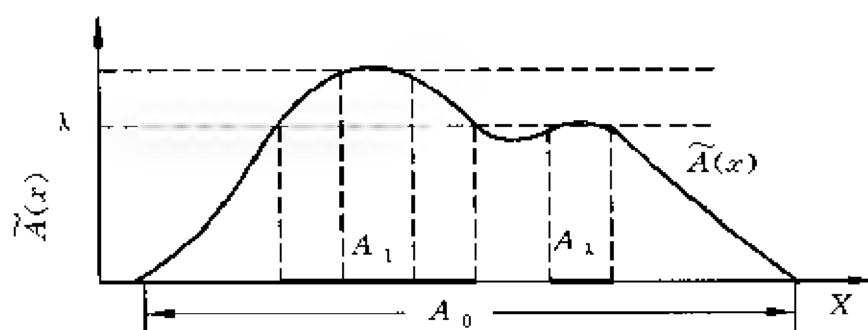


图 1.2.1

在 λ 水平下，x 属于模糊集合 $\widetilde{A}$. 如果 $x\notin A_\lambda$，我们称在 λ 水平下，x 不属于模糊集合 $\widetilde{A}$. 因此，一个模糊集合可以看作是一个具有游移边界的不分明集合.

截集和强截集有以下性质：

定理 1.2.1

(1) $A_0=X, A_{\underset{\cdot}{1}}=\varnothing$；

(2) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset A_\lambda(\lambda<1)$；

(3) 如果 $\lambda_1<\lambda_2$，则 $A_{\lambda_2}\subset A_{\lambda_1}, A_{\underset{\cdot}{\lambda_2}}\subset A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}}, A_{\lambda_2}\subset A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}}$.

证明 仅证(3)的最后式子. 事实上，$\forall\, x\in A_{\lambda_2}$，有 $\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda_2$，由于 $\lambda_1<\lambda_2$，所以

$$\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda_2>\lambda_1.$$

故

$$x\in A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}},$$

从而

$$A_{\lambda_2}\subset A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}}.$$

定理 1.2.2 设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，则

(1) $(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$,

$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$;

(2) $(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,

$$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

证明 仅证明(1),(2)类似可征. 事实上,

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})_{\lambda}&=\{x;(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})(x)\geqslant\lambda\}\\&=\{x;\widetilde{A}(x)\vee\widetilde{B}(x)\geqslant\lambda\}\\&=\{x;\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\}\cup\{x;\widetilde{B}(x)\geqslant\lambda\}\\&=A_{\lambda}\cup B_{\lambda},\\(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})_{\lambda}&=\{x;(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})(x)\geqslant\lambda\}\\&=\{x;\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(x)\geqslant\lambda\}\\&=\{x;\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\}\cap\{x;\widetilde{B}(x)\geqslant\lambda\}\\&=A_{\lambda}\cap B_{\lambda}.\end{aligned}$$

定理 1.2.3 若$\{\widetilde{A}_t;t\in T\}\subset\mathscr{F}(X)$,则

(1) $(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t)_{\lambda}\supset\bigcup_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\lambda}$;

(2) $(\bigcap_{t\in T}\widetilde{A}_t)_{\lambda}=\bigcap_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\lambda}$;

(3) $(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$;

(4) $(\bigcap_{t\in T}\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset\bigcap_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

证明 仅证明(3),其它情况类似可证. 事实上,若 $x\in(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$,则

$$\bigvee_{t\in T}\widetilde{A}_t(x)>\lambda.$$

由实数的上确界的保序性,一定存在 $t_0\in T$ 使得

$$\widetilde{A}_{t_0}(x)>\lambda,$$

即

$$x\in(\widetilde{A}_{t_0})_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

从而

$$x\in\bigcup_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

故

$$(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset\bigcup_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

反之，如果 $x\in\bigcup\limits_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，则一定存在 $t_0\in T$ 使得

$$x\in(\widetilde{A}_{t_0})_{\underset{\cdot}{\lambda}},$$

即

$$\widetilde{A}_{t_0}(x)>\lambda.$$

从而

$$\bigvee_{t\in T}\widetilde{A}_t(x)>\lambda.$$

换言之

$$x\in\big(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t\big)_{\underset{\cdot}{\lambda}},$$

故

$$\bigcup_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset\big(\bigcup_{t\in T}\widetilde{A}_t\big)_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

必须指出，(1)和(4)不能换为等式.

例 1.2.1 令

$$\widetilde{A}_n(x)\equiv\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

则

$$\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\big)_{\frac{1}{2}}=X,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}_n)_{\frac{1}{2}}=\varnothing.$$

即

$$\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\big)_{\frac{1}{2}}\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}_n)_{\frac{1}{2}}.$$

定理 1.2.4 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\{\lambda_t;t\in T\}\subset[0,1]$，则

(1) $A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)}=\bigcap\limits_{t\in T}A_{\lambda_t}$；

(2) $A_{(\bigwedge\limits_{t\in T}\lambda_t)}\supset\bigcup\limits_{t\in T}A_{\lambda_t}$；

(3) $A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)_{\cdot}}\subset\bigcap\limits_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\lambda}_t}$；

(4) $A_{(\bigwedge\limits_{t\in T}\lambda_t)_{\cdot}}=\bigcup\limits_{t\in T}A_{\underset{\cdot}{\lambda}_t}$.

证明 仅证明(1)，其余类似可证. 事实上，如果 $x\in A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)}$，

则

$$\widetilde{A}(x) \geqslant \bigvee_{t\in T}\lambda_t.$$

所以，$\forall\ t\in T$，我们有

$$\widetilde{A}(x) \geqslant \lambda_t.$$

即

$$x \in A_{\lambda_t}.$$

从而

$$x \in \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}.$$

故

$$A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)} \subset \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}.$$

反之，如果 $x\in \bigcap\limits_{t\in T} A_{\lambda_t}$，则对于任何 $t\in T$，我们有

$$x \in A_{\lambda_t}.$$

即

$$\widetilde{A}(x) \geqslant \lambda_t.$$

由确界的保序性，

$$\widetilde{A}(x) \geqslant \bigvee_{t\in T}\lambda_t.$$

即

$$x \in A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)},$$

从而

$$\bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t} \subset A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)}.$$

这样，我们就证明了

$$A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)} = \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}.$$

定理 1.2.5 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，则

(1) $A_\lambda = \bigcap\limits_{\beta<\lambda} A_\beta$.

(2) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\beta>\lambda} A_\beta$.

证明 仅证明(1);(2)类似可证.事实上,如果$x\in A_\lambda$,则

$$\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda>\beta.$$

所以,对于任何$\beta<\lambda$,有

$$x\in A_\beta,$$

从而

$$x\in\bigcap_{\beta<\lambda}A_\beta,$$

故

$$A_\lambda\subset\bigcap_{\beta<\lambda}A_\beta.$$

反之,如果$x\in\bigcap_{\beta<\lambda}A_\beta$,则对任何$\beta<\lambda$,有

$$x\in A_\beta,$$

即

$$\widetilde{A}(x)>\beta.$$

由确界的保序性,我们有

$$\widetilde{A}(x)\geqslant\bigvee_{\beta<\lambda}\beta=\lambda.$$

即

$$x\in A_\lambda.$$

从而

$$\bigcap_{\beta<\lambda}A_\beta\subset A_\lambda.$$

这样

$$A_\lambda=\bigcap_{\beta<\lambda}A_\beta.$$

定理 1.2.6 设$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$,则

(1) $(\widetilde{A}^c)_\lambda=(A_{1-\lambda})^c$;

(2) $(\widetilde{A}^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(A_{1-\lambda})^c$.

证明 仅证明(1);(2)类似可证.事实上,如果$x\in(\widetilde{A}^c)_\lambda$,则

$$\widetilde{A}^c(x)\geqslant\lambda,$$

即

$$1-\tilde{A}(x)\geqslant\lambda.$$

所以

$$\tilde{A}(x)\leqslant 1-\lambda.$$

即

$$\tilde{A}(x)\not> 1-\lambda.$$

也就是说

$$x\notin A_{1-\lambda},$$

从而

$$x\in(A_{1-\lambda})^c,$$

故

$$(\tilde{A}^c)_\lambda\subset(A_{1-\lambda})^c.$$

反之，如果 $x\in(A_{1-\lambda})^c$，则 $x\notin A_{1-\lambda}$，所以

$$\tilde{A}(x)\not> 1-\lambda,$$

即

$$\tilde{A}(x)\leqslant 1-\lambda,$$

从而

$$\tilde{A}^c(x)\geqslant\lambda,$$

故

$$x\in(\tilde{A}^c)_\lambda.$$

这样

$$(A_{1-\lambda})^c\subset(\tilde{A}^c)_\lambda.$$

结合两方面，我们有

$$(\tilde{A}^c)_\lambda=(A_{1-\lambda})^c.$$

注意：$(\tilde{A}^c)_\lambda\neq(A_\lambda)^c$.

1.2.2 模糊集合的分解定理

定义 1.2.2 设 $\tilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\lambda\in[0,1]$，$\lambda$ 与 $\tilde{A}$ 的数积的隶属

函数定义为

$$(\lambda\widetilde{A})(x) = \lambda \wedge \widetilde{A}(x),$$

特别地，如果 $A \in \mathscr{P}(X)$，则 $(\lambda A)(x) = \lambda \wedge A(x) = \lambda \cdot A(x)$.

显然，我们有

(1) 如果 $\lambda_1 < \lambda_2$，则 $\lambda_1\widetilde{A} \subset \lambda_2\widetilde{A}$；

(2) 如果 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$，则 $\lambda\widetilde{A} \subset \lambda\widetilde{B}$.

定理 1.2.7 （模糊集合的分解定理） 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X)$，则

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda,$$

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1)} \lambda A_\lambda.$$

如果 R_0 为[0,1]中的有理点集，则

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\lambda \in R_0} \lambda A_\lambda,$$

$$= \bigcup_{\lambda \in R_0 \setminus \{1\}} \lambda A_\lambda.$$

证明 仅证明第一种形式，其它形式类似可证. 事实上，因为

$$A_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_\lambda, \\ 0, & x \notin A_\lambda, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda)(x) &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda A_\lambda)(x) \\
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_\lambda(x)) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \cdot A_\lambda(x)) \\
&= \bigvee_{x \in A_\lambda} \lambda = \bigvee_{\widetilde{A}(x) \geqslant \lambda} \lambda \\
&= \widetilde{A}(x).
\end{aligned}$$

定理 1.2.8 设 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathscr{F}(X)$，则 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$ 的充分必要条件为 $A_\lambda \subset B_\lambda (\lambda \in [0,1])$，或 $A_\lambda \subset B_\lambda (\lambda \in [0,1))$，或 $A_\lambda \subset B_\lambda (\lambda \in R_0)$.

证明 仅证明第一种情况，其它类似可证. 必要性显然. 充分性，如果 $A_\lambda \subset B_\lambda (\lambda \in [0,1])$，由定理 1.2.7 可知

$$\widetilde{A}(x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \cdot A_\lambda(x)) \leqslant \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \cdot B_\lambda(x)) = \widetilde{B}(x),$$

则 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$.

定理 1.2.9 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X)$，令

$$H : [0,1] \to \mathscr{P}(X),$$
$$\lambda \mapsto H(\lambda)$$

满足：

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset H(\lambda) \subset A_\lambda \quad (\forall\ \lambda \in [0,1]),$$

则 (1) $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$；

(2) 如果 $\lambda_1 < \lambda_2$，则 $H(\lambda_1) \supset H(\lambda_2)$；

(3) $A_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$ $(\lambda \neq 0)$，$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$ $(\lambda \neq 1)$.

证明

(1) 由于 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset H(\lambda) \subset A_\lambda$，所以

$$\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset \lambda H(\lambda) \subset \lambda A_\lambda.$$

由定理 1.2.7，我们有

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda = \widetilde{A},$$

从而

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda).$$

(2) 由于 $\lambda_1 < \lambda_2$，所以，由定理 1.2.1 和定理条件我们有

$$H(\lambda_1) \supset A_{\lambda_1} \supset A_{\underset{\cdot}{\lambda_2}} \supset H(\lambda_2).$$

(3) 由于对于任意 $\alpha < \lambda$，$H(\alpha) \supset A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \supset A_\lambda$，所以

$$A_\lambda \subset \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \qquad (\lambda \neq 0),$$

又由定理 1.2.4，

$$\bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \subset \bigcap_{\alpha < \lambda} A_\alpha = A_{(\bigvee\limits_{\alpha < \lambda} \alpha)} = A_\lambda \quad (\lambda \neq 0).$$

因此

$$A_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \qquad (\lambda \neq 0).$$

同理可证

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \qquad (\lambda \neq 1).$$

定理 1.2.10 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，如果存在经典集合族 $H(\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，满足条件：

(1) 如果 $\alpha<\lambda$，则 $H(\lambda)\subset H(\alpha)$；

(2) $\widetilde{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$；

则 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset H(\lambda)\subset A_{\lambda}$.

证明 由于

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x)&=\sup\{\alpha;x\in A_{\alpha}\}\\&=\sup\{\alpha;x\in H(\alpha)\}\\&=\sup\{\alpha;x\in A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\},\end{aligned}$$

如果 $x\in A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，则 $\widetilde{A}(x)>\lambda$. 即存在 $\alpha>\lambda$ 使得 $x\in H(\alpha)$，故 $x\in H(\lambda)$. 如果 $x\in H(\lambda)$，则 $\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda$，从而 $x\in A_{\lambda}$.

1.2.3 集合套及其运算

定义 1.2.3 设 X 是经典集合，$\mathscr{P}(X)$ 为 X 上的幂集，映射

$$H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$$

称为集合套，如果对于任何 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，$\lambda_1\leqslant\lambda_2$，有

$$H(\lambda_2)\subset H(\lambda_1).$$

用 $\mathscr{H}(X)$ 表示[0,1]上集合套的全体.

设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，令

$$H_1(\lambda)=A_{\lambda}=\{x;\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\}\qquad(\lambda\in[0,1]),$$

$$H_2(\lambda)=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{x;\widetilde{A}(x)>\lambda\}\qquad(\lambda\in[0,1)),$$

显然有

$$H_1,H_2\in\mathscr{H}(X).$$

定义 1.2.4 设 $H_1,H_2\in\mathscr{H}(X)$，如果对于任何 $\lambda\in[0,1]$ 有：

$$H_1(\lambda)\subset H_2(\lambda),$$

称 H_1 含于 H_2，记作 $H_1\subset H_2$.

定义 1.2.5 设 $H\in\mathscr{H}(X)$，$H_t\in\mathscr{H}(X)$ $(t\in T)$. 分别称

$$(\bigcup_{t\in T}H_t)(\lambda)=\bigcup_{t\in T}H_t(\lambda)\qquad(\lambda\in[0,1]),$$

$$(\bigcap_{t\in T}H_t)(\lambda)=\bigcap_{t\in T}H_t(\lambda)\qquad(\lambda\in[0,1]),$$

$$H^c(\lambda)=(H(1-\lambda))^c\qquad(\lambda\in[0,1])$$

为集合套的并、交、补运算.

显然，$\bigcup H_t$，$\bigcap H_t$，$H^c\in\mathscr{H}(H)$.

设 $X(\lambda)=X(\lambda\in[0,1])$，$\overline{\varnothing}(\lambda)=\varnothing(\lambda\in[0,1])$，则 $\overline{X}$，$\overline{\varnothing}$ 分别为 $\mathscr{H}(X)$ 的最大元和最小元.

定理 1.2.11 $(\mathscr{H}(X),\bigcup,\bigcap,c)$ 具有性质：

(1) 它是分配格；

(2) $\overline{X}\bigcup H=\overline{X}$，$\overline{X}\bigcap H=H$，$\overline{\varnothing}\bigcup H=H$，$\overline{\varnothing}\bigcap H=\overline{\varnothing}$；

(3) 满足对合律：$(H^c)^c=H$；

(4) 满足对偶律：a) $(\bigcup_{t\in T}H_t)^c=\bigcap_{t\in T}H_t^c$；

b) $(\bigcap_{t\in T}H_t)^c=\bigcup_{t\in T}H_t^c$；

(5) 满足幂等律：$H\bigcup H=H$，$H\bigcap H=H$.

证明 仅证明集合套运算满足分配律，集合套运算满足交换律、结合律和吸收律可以类似证明．事实上，对于任何的 $\lambda\in[0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}(H\cap(\bigcup_{t\in T}H_t))(\lambda)&=H(\lambda)\bigcap(\bigcup_{t\in T}H_t)(\lambda)\\&=H(\lambda)\bigcap(\bigcup_{t\in T}H_t(\lambda))\\&=\bigcup_{t\in T}(H(\lambda)\bigcap H_t(\lambda))\\&=\bigcup_{t\in T}(H\bigcap H_t)(\lambda)\\&=(\bigcup_{t\in T}(H\bigcap H_t))(\lambda),\end{aligned}$$

从而

$$H\bigcap(\bigcup_{t\in T}H_t)=\bigcup_{t\in T}(H\bigcap H_t).$$

(2) 显然.

(3) 对于任何的 $\lambda\in[0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}(H^c)^c(\lambda) &= ((H^c)(1-\lambda))^c \\ &= ((H(1-(1-\lambda)))^c)^c \\ &= H(\lambda),\end{aligned}$$

从而

$$(H^c)^c = H.$$

(4) a) 对于任何的 $\lambda\in[0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}(\bigcup_{t\in T}H_t)^c(\lambda) &= ((\bigcup_{t\in T}H_t)(1-\lambda))^c = (\bigcup_{t\in T}H_t(1-\lambda))^c \\ &= \bigcap_{t\in T}(H_t(1-\lambda))^c = \bigcap_{t\in T}H_t^c(\lambda),\end{aligned}$$

从而

$$(\bigcup_{t\in T}H_t)^c = \bigcap_{t\in T}H_t^c.$$

b) 类似可证.

(5) 显然.

下面我们总假定 $\bigcap_{i\in\varnothing}A_i = X$，$\bigcup_{i\in\varnothing}A_i=\varnothing$.

定义 1.2.6 设 H_1、$H_2\in\mathscr{H}(X)$，如果对于任何 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$\bigcap_{\lambda>\alpha}H_1(\alpha) = \bigcap_{\lambda>\alpha}H_2(\alpha),$$

称 H_1 与 H_2 等价，记为 $H_1\sim H_2$.

显然，"等价"是等价关系，即满足：

(1) 自反性：$H\sim H$；

(2) 对称性：$H_1\sim H_2\Rightarrow H_2\sim H_1$；

(3) 传递性：$H_1\sim H_2$，$H_2\sim H_3\Rightarrow H_1\sim H_3$.

将 $\mathscr{H}(X)$ 分类，我们记

$$\{H\} = \{H';H'\sim H\}, \mathscr{F}'(X) = \{\{H\};H\in\mathscr{H}(X)\}.$$

定理 1.2.12 对任何 $H\in\mathscr{H}(X)$ 有关系式：

(1) $\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha}\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)$；

(2) $\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha}\bigcup_{\beta>\lambda}H(\beta)$.

证明 (1) 如果 $\beta<\lambda$,则 $H(\lambda)\subset H(\beta)$,从而

$$H(\lambda)\subset\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta).$$

于是

$$\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)\subset\bigcup_{\lambda>\alpha}\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta).$$

另一方面,如果 $\lambda>\alpha$,则由实数稠密性,存在 λ' 和 β 使得 $\alpha<\lambda'<\beta<\lambda$. 从而

$$H(\beta)\subset H(\lambda')\subset\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda).$$

因此

$$\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)\subset\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda),$$

故

$$\bigcup_{\lambda>\alpha}\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)\subset\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda).$$

结合两方面即证

$$\bigcup_{\lambda>\alpha}\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)=\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda).$$

定理 1.2.13 设 $\{H\}\in\mathscr{T}'(X)$,令

$$F_H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)\quad \lambda\mapsto F_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\quad(\lambda\in[0,1]),$$

$$F_{\underline{H}}:[0,1]\to\mathscr{P}(X)\quad \lambda\mapsto F_{\underline{H}}(\lambda)=\bigcup_{\lambda<\alpha}H(\alpha)\quad(\lambda\in[0,1]),$$

则 (1) $F_H,F_{\underline{H}}\in\mathscr{H}(X)$;

(2) $\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow F_H(\lambda_2)\subset F_{\underline{H}}(\lambda_1)$;

(3) $F_{\underline{H}}\subset H\subset F_H$;

(4) a) $\bigcup_{\alpha>\lambda}F_H(\alpha)=F_{\underline{H}}(\lambda)\qquad(\lambda\in[0,1])$,

b) $\bigcap_{\alpha<\lambda}F_H(\alpha)=F_H(\lambda)\qquad(\lambda\in[0,1])$;

(5) a) $\bigcup_{\alpha>\lambda}F_{\underline{H}}(\alpha)=F_{\underline{H}}(\lambda)\qquad(\lambda\in[0,1])$;

b) $\bigcap_{\alpha<\lambda}F_{\underline{H}}(\alpha)=F_H(\lambda)\qquad(\lambda\in[0,1])$.

证明 (1),(2),(3)显然成立.

(4) a) 对于任何 $\alpha>\lambda(\lambda\neq1)$,$F_H(\alpha)\subset F_{\underline{H}}(\lambda)$,从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} F_H(\alpha) \subset F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda).$$

另一方面，对任何 $\alpha\in[0,1]$，$F_H(\alpha)\supset H(\alpha)$，从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}F_H(\alpha)\supset\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda).$$

于是

$$F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda}F_H(\alpha)\qquad(\lambda\in[0,1]).$$

b) 由定理 1.2.12，我们有

$$\bigcap_{\lambda>\alpha}F_{\underset{\cdot}{H}}(\alpha)=\bigcap_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)=\bigcap_{\beta<\lambda}H(\beta)=F_H(\lambda).$$

(5) 证明类似.

定理 1.2.14 设 $H,H'\in\mathscr{K}(X)$，我们有 $H\sim H'$ 的充分必要条件为，对任何 $\lambda\in[0,1]$，

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H'(\alpha).$$

证明 只要证明对于任意 $\lambda\in[0,1]$，$F_H(\lambda)=F_{H'}(\lambda)$ 的充分必要条件为对任意 $\lambda\in[0,1]$，$F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)=F_{\underset{\cdot}{H'}}(\lambda)$. 事实上，如果对于任意 $\lambda\in[0,1]$，$F_H(\lambda)=F_{H'}(\lambda)$，则

$$F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)=\bigcup_{\alpha>\lambda}F_H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}F_{H'}(\alpha)=F_{\underset{\cdot}{H'}}(\lambda)\qquad(\lambda\in[0,1]).$$

反之，如果对于任意 $\lambda\in[0,1]$，$F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)=F_{\underset{\cdot}{H'}}(\lambda)$，则

$$F_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}F_{\underset{\cdot}{H}}(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}F_{\underset{\cdot}{H'}}(\alpha)=F_{H'}(\lambda).$$

定理 1.2.15 设 $H,H'\in\mathscr{K}(X)$，$H_t,H'_t\in\mathscr{K}(X)\,(t\in T)$，如果 $H\sim H'$，$H_t\sim H'_t\,(t\in T)$，则有性质：

(1) $H^c\sim(H')^c$；

(2) $\bigcup_{t\in T}H_t\sim\bigcup_{t\in T}H'_t$；

(3) $\bigcap_{t\in T}H_t\sim\bigcap_{t\in T}H'_t$.

证明

(1) 由于 $H\sim H'$，则对于任意 $\lambda\in[0,1]$，

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H'(\alpha).$$

从而

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H^c(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H(1-\alpha))^c=(\bigcup_{1-\alpha>1-\lambda}H(1-\alpha))^c$$
$$=(\bigcup_{1-\alpha>1-\lambda}H'(1-\alpha))^c=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H'(1-\alpha))$$
$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H')^c(\alpha),$$

所以

$$H^c\sim(H')^c.$$

(2) 由于对任何 $t\in T$, $H_t\sim H'_t$, 则对于任意的 $\lambda\in[0,1]$有:

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H'_t(\alpha),$$

从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}((\bigcup_{t\in T}H_t)(\alpha))=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H_t(\alpha))$$
$$=\bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t(\alpha))=\bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\alpha>\lambda}H'_t(\alpha))$$
$$=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H'_t(\alpha))=\bigcup_{\alpha>\lambda}((\bigcup_{t\in T}H'_t)(\alpha)),$$

所以

$$\bigcup_{t\in T}H_t\sim\bigcup_{t\in T}H'_t.$$

(3) 由于对任何 $t\in T$, $H_t\sim H'_t$, 则对于任意的 $\lambda\in[0,1]$有:

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H'_t(\alpha),$$

所以

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}((\bigcap_{t\in T}H_t)(\alpha))=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T}H_t(\alpha))$$
$$=\bigcap_{t\in T}(\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha))=\bigcap_{t\in T}(\bigcap_{\alpha<\lambda}H'_t(\alpha))$$
$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T}H'_t(\alpha))=\bigcap_{\alpha<\lambda}((\bigcap_{t\in T}H'_t)(\alpha)),$$

所以

$$\bigcap_{t\in T}H_t\sim\bigcap_{t\in T}H'_t.$$

定义 1.2.7 设$\{H\}\in\mathscr{F}'(X)$, $\{\{H_t\};t\in T\}\subset\mathscr{F}'(X)$, 我们分别称

$$\bigcup_{t\in T}\{H_t\}=\{\bigcup_{t\in T}H_t\};$$

$$\bigcap_{t\in T}\{H_t\}=\{\bigcap_{t\in T}H_t\};$$
$$\{H\}^c=\{H^c\},$$
为集合套的等价类的并、交和补.

定理 1.2.15 $(\mathscr{F}'(X),\bigcup,\bigcap,c)$是一个分配格.

证明 类似定理 1.2.11.

1.2.4 模糊集合的表现定理

定理 1.2.16（模糊集合的表现定理） 设$\{H\}\in\mathscr{F}'(X)$，令
$$\widetilde{A}=f(\{H\})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda),$$
则 f 是 $\mathscr{F}'(X)$到$\mathscr{F}(X)$的单满射，且
$$F_H(\lambda)=A_\lambda=\{x;\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\},$$
$$F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\{x;\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\}.$$

证明

(1) 先证明 $\widetilde{A}=f(\{H\})$被$\{H\}$唯一确定. 由于对于任何 $\lambda\in[0,1]$，有
$$F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)\subset H(\lambda)\subset F_H(\lambda),$$
则对于任何 $x\in X$，
$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)(x))\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge H(\lambda)(x))$$
$$=\widetilde{A}(x)\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge F_H(\lambda)(x)),$$
即 $\bigvee_{x\in F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)}\lambda\leqslant\widetilde{A}(x)\leqslant\bigvee_{x\in F_H(\lambda')}\lambda'$. 设 $x\in F_H(\lambda')$，则对于任何 $\lambda<\lambda'$恒有 $x\in F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)$，于是
$$\lambda'=\bigvee_{\lambda<\lambda'}\lambda\leqslant\bigvee_{x\in F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)}\lambda,$$
从而
$$\bigvee_{x\in F_H(\lambda')}\lambda'\leqslant\bigvee_{x\in F_{\underset{\cdot}{H}}(\lambda)}\lambda.$$
因此

$$\bigvee_{x\in F_H(\lambda)}\lambda=\bigvee_{x\in F_H(\lambda)}\lambda=\widetilde{A}(x),$$

即 $\widetilde{A}(x)$ 被 $\{H\}$ 唯一确定．

(2) 仅证 $A_\lambda=F_H(\lambda)$，其余类似可证．事实上，当 $\lambda=0$ 时，$A_0=F_H(0)=X$ 显然成立．当 $0<\lambda$ 时，如果 $x\in F_H(\lambda)$，则

$$\widetilde{A}(x)=\bigvee_{x\in F_H(\lambda')}\lambda'\geqslant\lambda,$$

即 $x\in A_\lambda$. 反之，如果 $x\in A_\lambda$，则 $x\in F_H(\lambda)$. 如果不然，则由

$$F_H(\lambda)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha),$$

必存在 $\alpha_0<\lambda$，使得 $x\notin H(\alpha_0)$，从而对任何 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$x\notin H(\alpha)$. 于是

$$\widetilde{A}(x)=\bigvee_{x\in H(\lambda')}\lambda'\leqslant\alpha_0<\lambda.$$

与 $x\in A_\lambda$ 矛盾！故 $A_\lambda=F_H(\lambda)$.

(3) 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，令 $H(\lambda)=\{x;\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\}$，则 $H\in\mathscr{H}(X)$，从而 $\{H\}\in\mathscr{F}'(X)$ 且

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda H(\lambda)(x))=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda A_\lambda(x))=\widetilde{A}(x),$$

所以 $f(\{H\})=\widetilde{A}$，即 f 是满射. 如果存在 $\{H\}$，$\{H'\}\in\mathscr{F}'(X)$ 使得 $f(\{H\})=f(\{H'\})=\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，则对任何 $\lambda\in[0,1]$，有

$$F_H(\lambda)=A_\lambda=F_{H'}(\lambda),$$

所以 $H\sim H'$，从而 $\{H\}=\{H'\}$，即 f 是单射．

进一步地，我们有

定理 1.2.17 $(\mathscr{F}'(X),\bigcup,\bigcap,c)\cong(\mathscr{F}(X),\bigcup,\bigcap,c)$.

证明 由定理 1.2.16 知，存在 $\mathscr{F}'(X)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的单满射 f，使得对任意的 $\{H\}\in\mathscr{F}'(X)$，有

$$\widetilde{A}=f(\{H\})=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

设 $\{H_t\}\in\mathscr{F}'(X)(t\in T)$，则

$$f(\bigcup_{t\in T}\{H_t\})=f(\{\bigcup_{t\in T}H_t\})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}H_t)(\lambda)$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T})H_t(\lambda)).$$

于是，对任何 $x\in X$，

$$f(\bigcup_{t\in T}\{H_t\})(x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge((\bigcup_{t\in T}H_t(\lambda)),(x))$$
$$=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigvee_{t\in T}H_t(\lambda)(x))$$
$$=\bigvee_{t\in T}(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge H_t(\lambda)(x)))$$
$$=(\bigcup_{t\in T}(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H_t(\lambda)))(x).$$
$$=(\bigcup_{t\in T}f(\{H_t\}))(x),$$

故

$$f(\bigcup_{t\in T}\{H_t\})=\bigcup_{t\in T}f(\{H_t\}).$$

设 $f(\{H_t\})=\widetilde{A}_t(t\in T)$，则存在$\{H\}\in\mathscr{F}'(X)$，使得

$$f(\{H\})=\bigcap_{t\in T}\widetilde{A}_t=\bigcap_{t\in T}f(\{H_t\}).$$

于是，由定理 1.2.16 知，

$$F_H(\lambda)=\{x;\bigwedge_{t\in T}\widetilde{A}_t(x)\geqslant\lambda\}$$
$$=\bigcap_{t\in T}\{x;\widetilde{A}_t(x)\geqslant\lambda\}=\bigcap_{t\in T}(\widetilde{A}_t)_\lambda,$$

所以，如果 $x\in F_H(\lambda)$，则对于任何 $t\in T$，$x\in(\widetilde{A}_t)_\lambda$. 即

$$\widetilde{A}_t(x)\geqslant\lambda.$$

因此，$x\in F_{H_t}(\lambda)$，从而 $x\in\bigcap_{t\in T}F_{H_t}(\lambda)=(\bigcap_{t\in T}F_{H_t})(\lambda)$. 故

$$F_H(\lambda)\subset(\bigcap_{t\in T}F_{H_t})(\lambda).$$

反之，如果 $x\in(\bigcap_{t\in T}F_{H_t})(\lambda)$，则对任何 $t\in T$，$x\in F_{H_t}(\lambda)$，从而 $x\in(\widetilde{A}_t)_\lambda$，于是 $x\in F_H(\lambda)$. 因此

$$(\bigcap_{t\in T}F_{H_t})(\lambda)=F_H(\lambda),$$

故

$$\{H\}=\{F_H\}=\{\bigcap_{t\in T}F_{H_t}\}=\bigcap_{t\in T}\{F_{H_t}\}=\bigcap_{t\in T}\{H_t\}.$$

这样，我们就有

$$f(\bigcap_{t\in T}\{H_t\})=\bigcap_{t\in T}f(\{H_t\}).$$

设$\{H\}\in\mathscr{F}'(X)$，则存在 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$使得

$$f(\{H\}) = \widetilde{A}.$$

由于 f 是单满射,所以存在$\{\overline{H}\}\in\mathscr{F}(X)$使得

$$f(\{\overline{H}\}) = \widetilde{A}^c.$$

于是

$$\begin{aligned}F_{\overline{H}}(\lambda) &= (\widetilde{A}^c)_\lambda = \{x;\widetilde{A}^c(x) \geqslant \lambda\} \\ &= \{x;1-\widetilde{A}(x) \geqslant \lambda\} = \{x;\widetilde{A}(x) \leqslant 1-\lambda\} \\ &= \{x;\widetilde{A}(x) > \lambda\}^c = (A_{\underset{\cdot}{\lambda}})^c = (F_{\underset{\cdot}{H}})^c(\lambda).\end{aligned}$$

所以

$$\{\overline{H}\} = \{F_{\overline{H}}\} = \{(F_{\underset{\cdot}{H}})^c\} = \{F_{\underset{\cdot}{H}}\}^c = \{H\}^c.$$

因此

$$f(\{H\}^c) = f(\{\overline{H}\}) = \widetilde{A}^c = (f(\{H\}))^c.$$

推论 1.2.1 设 $H\in\mathscr{H}(X)$,令

$$\widetilde{A} = g(H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda),$$

则 g 是 $\mathscr{H}(X)$到$\mathscr{F}(X)$的同态满射,且

(1) $A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subset H(\alpha)\subset A_\alpha$;

(2) $A_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda)$;

(3) $A_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda)$.

证明 由定理 1.2.17 可证.

推论 1.2.2 设 $H\in\mathscr{H}(X)$,且

$$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) = H(\alpha),$$

则 $A=g(H)$时,$A_\alpha=H(\alpha)$. 如果

$$\bigcap_{\lambda>\alpha} H(\lambda) = H(\alpha),$$

则 $A=g(H)$时,$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}=H(\alpha)$.

证明 显然.

1.3 模糊集合的模运算

定义 1.3.1 映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$称为三角模，如果满足条件：

(1) $T(0,0)=0,T(1,1)=1$；

(2) 交换律：$T(a,b)=T(b,a)$；

(3) 结合律：$T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$；

(4) 单调性：$a\leqslant c,b\leqslant d\Rightarrow T(a,b)\leqslant T(c,d)$.

如果三角模满足 $T(a,1)=a(a\in[0,1])$，称 T 为 T 模. 如果三角模满足 $T(a,0)=a(a\in[0,1])$，称 T 为 S 模.

定义 1.3.2 称 $a^c=1-a$ 为 a 的补. 如果 T 模 T 和 S 模 S 满足：

$$(T(a,b))^c=S(a^c,b^c),(S(a,b))^c=T(a^c,b^c),$$

称 T 和 S 为对偶模.

下面给出的模是 T 模

$$T_0'(a,b)=\begin{cases}a, & b=1\\ b, & a=1\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$T_0(a,b)=\min(a,b),$$

$$T_1(a,b)=a\cdot b,$$

$$T_2(a,b)=\frac{a\cdot b}{1+(1-a)(1-b)},$$

$$T_\infty(a,b)=\max(0,a+b-1),$$

$$T^{(\lambda)}(a,b)=\frac{a\cdot b}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)}\quad(\lambda\geqslant 0),$$

$$T^{(\nu)}(a,b)=1-\min(1,[(1-a)^\nu+(1-b)^\nu]^{1/\nu})\quad(\nu\geqslant 1).$$

下面给出的模是 S 模

$$
S_0'(a,b)=\begin{cases} b, & a=0, \\ a, & b=0, \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}
$$

$$S_0(a,b)=\max(a,b),$$

$$S_1(a,b)=a+b-a\cdot b,$$

$$S_\infty(a,b)=\min(1,a+b),$$

$$S^{(\lambda)}(a,b)=\frac{a+b+(\lambda-2)ab}{1+(\lambda-1)ab}\qquad(\lambda\geqslant 0),$$

$$S^{(\nu)}(a,b)=\min(1,(a^\nu+b^\nu)^{1/\nu})\qquad(\nu\geqslant 1),$$

其中 S_0' 与 T_0'，S_0 与 T_0，S_1 与 T_1，S_2 与 T_2，S_∞ 与 T_∞，$S^{(\lambda)}$ 与 $T^{(\lambda)}$ 和 $S^{(\nu)}$ 与 $T^{(\nu)}$ 都是对偶模.

记

$$\mathscr{D}=\{T;T\text{ 是三角模}\}.$$

定义 1.3.3 设 $T',T''\in\mathscr{D}$，如果对于任何 $a,b\in[0,1]$ 有

$$T'(a,b)\leqslant T''(a,b),$$

称 T' 弱于 T^2，记为 $T'\leqslant T''$.

定理 1.3.1 三角模之间有如下关系：

$$T_0'\leqslant T_\infty\leqslant T_2\leqslant T_1\leqslant T_0\leqslant S_0\leqslant S_1\leqslant S_2\leqslant S_\infty\leqslant S_0'.$$

且对任一 T 模 T 有

$$T_0'(a,b)\leqslant T(a,b)\leqslant T_0(a,b).$$

对任一 S 模 S 有

$$S_0(a,b)\leqslant S(a,b)\leqslant S_0'(a,b).$$

证明 直接验证即可.

定理 1.3.2 设 T 和 S 分别是 T 模和 S 模，则

(1) $T=T_0$ 的充分必要条件是对任意的 $a\in[0,1]$ 有：

$$T(a,a)=a;$$

(2) $S=S_0$ 的充分必要条件是对任意的 $a\in[0,1]$ 有：

$$S(a,a)=a.$$

证明 仅证明(1);(2)类似可证．事实上,如果 $T=T_0$,显然有 $T(a,a)=a$. 反之,如果 $T(a,a)=a$,则

$$a \wedge b = T(a \wedge b, a \wedge b) \leqslant T(a,b) \leqslant T_0'(a,b) = a \wedge b,$$

故 $T(a,b)=T_0(a,b)$.

定理 1.3.3 设 $g(t)$是$[0,1]$到$[0,1]$的严格单调增的连续函数,且 $g(0)=0, g(1)=1$, $G(t)$为 $g(t)$的逆映射．记

$$T(a,b) = G(T'(g(a),g(b))),$$

如果 T' 是三角模,则 T 也是三角模．如果 T' 是 T 模,则 T 也是 T 模．如果 T' 是 S 模,则 T 也是 S 模．

证明 直接验证即可．

定义 1.3.4 设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$, T 和 S 分别是 T 模和 S 模,并且它们是对偶模,称

$$(\widetilde{A} \cup^* \widetilde{B})(x) = S(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x))$$

为 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 的模并,称

$$(\widetilde{A} \cap^* \widetilde{B})(x) = T(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x))$$

为 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 的模交,称

$$\widetilde{A}^c(x) = 1 - \widetilde{A}(x)$$

为 $\widetilde{A}$ 的补．

定理 1.3.4 $(\mathscr{F}(X), \cup^*, \cap^*, c)$具有以下性质:

(1) 交换律: $\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B}=\widetilde{B}\cup^*\widetilde{A}$, $\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B}=\widetilde{B}\cap^*\widetilde{A}$;

(2) 结合律: $\widetilde{A}\cup^*(\widetilde{B}\cup^*\widetilde{C})=(\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B})\cup^*\widetilde{C}$,
$\widetilde{A}\cap^*(\widetilde{B}\cap^*\widetilde{C})=(\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B})\cap^*\widetilde{C}$;

(3) $\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B}\subset\widetilde{A}$, $\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B}\subset\widetilde{B}$, $\widetilde{A}\subset\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B}$, $\widetilde{B}\subset\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B}$;

(4) 两极律: $\widetilde{A}\cap^*\varnothing=\varnothing$, $\widetilde{A}\cup^*\varnothing=\widetilde{A}$,
$\widetilde{A}\cap^* X=\widetilde{A}$, $\widetilde{A}\cup^* X=X$;

(5) $\varnothing^c=X$, $X^c=\varnothing$;

(6) 对偶律: $(\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B})^c=\widetilde{A}^c\cap^*\widetilde{B}^c$,

$$(\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B})^c=\widetilde{A}^c\cup^*\widetilde{B}^c.$$

证明 直接验证可得.

例 1.3.1 如果 $T=T_0, S=S_0$，则

$$\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B},$$
$$\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B}=\widetilde{A}\cap\widetilde{B}.$$

如果 $T=T_1, S=S_1$，则

$$(\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)-\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x),$$
$$(\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x).$$

如果 $T=T_2, S=S_2$，则

$$(\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B})(x)=\frac{\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)}{1+\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x)},$$
$$(\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B})(x)=\frac{\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x)}{1+(1-\widetilde{A}(x))(1-\widetilde{B}(x))}.$$

如果 $T=T_\infty, S=S_\infty$，则

$$(\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B})(x)=\min(1,\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)),$$
$$(\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B})(x)=\max(0,\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)-1).$$

如果 $T=T^{(\lambda)}, S=S^{(\lambda)}(\lambda\geqslant 0)$，则

$$(\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B})(x)=\frac{\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x)}{\lambda+(1-\lambda)(\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)-\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x))},$$
$$(\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B})(x)=\frac{\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)+(\lambda-2)\widetilde{A}(x)\widetilde{B}(x)}{1+(\lambda-1)\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x)}.$$

如果 $T=T^{(\nu)}, S=S^{(\nu)}(\nu\geqslant 1)$，则

$$(\widetilde{A}\cup^*\widetilde{B})(x)=\min(1,(\widetilde{A}(x)^\nu+\widetilde{B}(x)^\nu)^{1/\nu}),$$
$$(\widetilde{A}\cap^*\widetilde{B})(x)=1-\min(1,[(1-\widetilde{A}(x))^\nu+(1-\widetilde{B}(x))^\nu]^{1/\nu}).$$

第2章　模糊数的模糊极限

2.1　模糊数的定义及其性质

2.1.1　模糊集合的扩展原理

定义 2.1.1　设 $f: X \to Y, x \mapsto f(x)$，$f$ 可以诱导出一个 $\mathscr{P}(X)$ 到 $\mathscr{P}(Y)$ 的映射及一个从 $\mathscr{P}(Y)$ 到 $\mathscr{P}(X)$ 的映射：

$$f: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y), A \mapsto f(A) = \{y; \exists\, x \in A, y = f(x)\}$$

$$f^{-1}: \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X), B \mapsto f^{-1}(B) = \{x; f(x) \in B\},$$

称 $f(A)$ 为 A 的象，$f^{-1}(B)$ 为 B 的逆象．其映射称为经典集合的扩展原理．

定理 2.1.1　经典集合的扩展原理有性质：

(1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$；

(2) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$；

(3) $f(\bigcup_{t\in T} A_t) = \bigcup_{t\in T} f(A_t)$；

(4) $f(\bigcap_{t\in T} A_t) \subset \bigcap_{t\in T} f(A_t)$，特别地，当 f 是单射时，等号成立．

(5) $f^{-1}(\bigcup_{t\in T} B_t) = \bigcup_{t\in T} f^{-1}(B_t)$；

(6) $f^{-1}(\bigcap_{t\in T} B_t) = \bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t)$；

(7) $f(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x)$；

(8) $f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$.

证明

(1)(2) 显然．

(3) 对于任何 $y \in f(\bigcup_{t\in T} A_t)$，则存在 $x \in \bigcup_{t\in T} A_t$ 使得 $f(x) = y$.

从而存在 $t_0\in T$，$x\in A_{t_0}$ 使得 $f(x)=y$，于是 $y\in f(A_{t_0})$，故 $y\in \bigcup_{t\in T} f(A_t)$。反之，对任何 $y\in \bigcup_{t\in T} f(A_t)$，则存在 $t_0\in T$，使得 $y\in f(A_{t_0})$。于是存在 $x\in A_{t_0}\subset \bigcup_{t\in T} A_t$，使得 $f(x)=y$，从而 $y\in f(\bigcup_{t\in T} A_t)$。

(4) 对于任何 $y\in f(\bigcap_{t\in T} A_t)$，则存在 $x\in \bigcap_{t\in T} A_t\subset A_t(t\in T)$，使得 $f(x)=y$，于是 $y\in f(A_t)(t\in T)$，从而 $y\in \bigcap_{t\in T} f(A_t)$。

(5) 对任何 $x\in f^{-1}(\bigcup_{t\in T} B_t)$，则 $f(x)\in \bigcup_{t\in T} B_t$。于是存在 $t_0\in T$，$f(x)\in B_{t_0}$，即 $x\in f^{-1}(B_{t_0})\subset \bigcup_{t\in T} f^{-1}(B_t)$。反之，对任何 $x\in \bigcup_{t\in T} f^{-1}(B_t)$。则存在 $t_0\in T$，使得 $x\in f^{-1}(B_{t_0})$，即 $f(x)\in B_{t_0}\subset \bigcup_{t\in T} B_t$。于是 $x\in f^{-1}(\bigcup_{t\in T} B_t)$。

(6) 对任何 $x\in f^{-1}(\bigcap_{t\in T} B_t)$，则 $f(x)\in \bigcap_{t\in T} B_t\subset B_t(t\in T)$，于是 $x\in f^{-1}(B_t)(t\in T)$，从而 $x\in \bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t)$。反之，对任何 $x\in \bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t)$，则对任何 $t\in T$，$x\in f^{-1}(B_t)$，即 $f(x)\in B_t$，于是 $f(x)\in \bigcap_{t\in T} B_t$。从而 $x\in f^{-1}(\bigcap_{t\in T} B_t)$。

(7) $f(A)(y)=1\Leftrightarrow y\in f(A)\Leftrightarrow \exists\ x\in A$,

$f(x)=y\Leftrightarrow \bigvee_{f(x)=y} A(x)=1$.

(8) $f^{-1}(B)(x)=1\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B\Leftrightarrow B(f(x))=1$.

定义 2.1.2 （模糊集合的扩展原理）设 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)$。f 可以诱导出一个从 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 的映射及一个从 $\mathscr{F}(Y)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的映射：

$$f: \mathscr{F}(X)\to \mathscr{F}(Y), \widetilde{A}\mapsto f(\widetilde{A}),$$

$$f^{-1}: \mathscr{F}(Y)\to \mathscr{F}(X), \widetilde{B}\mapsto f^{-1}(\widetilde{B}),$$

其中 $f(\widetilde{A})$，$f^{-1}(\widetilde{B})$ 的隶属函数分别定义为：

$$f(\widetilde{A})(y)=\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x),$$

$$f^{-1}(\widetilde{B})(x)=\widetilde{B}(f(x)).$$

称 $f(\widetilde{A})$ 为 $\widetilde{A}$ 的象，称 $f^{-1}(\widetilde{B})$ 为 $\widetilde{B}$ 的逆象．

定理 2.1.2 设 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)$.

(1) 如果 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，则

$$f(\widetilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda),$$

且

a) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f(A_\lambda)\subset f(\widetilde{A})_\lambda \qquad (\lambda\in[0,1])$；

b) $f(\widetilde{A})_\lambda=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}f(A_\alpha)$；

c) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}f(A_\alpha)$；

d) $f(\widetilde{A})_\lambda=f(A_\lambda)$的充要条件是

$$\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\max_{f(x)=y}\widetilde{A}(x).$$

(2) 如果 $\widetilde{B}\in\mathscr{F}(Y)$，则

$$f^{-1}(\widetilde{B})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda),$$

且

e) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f^{-1}(B_\lambda)\subset f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda \qquad (\lambda\in[0,1])$；

f) $f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}f^{-1}(B_\alpha)=f^{-1}(B_\lambda)$；

g) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}f^{-1}(B_\alpha)$.

证明

(1) 由于对任何 $y\in Y$，则由定理 2.11(7)，

$$\begin{aligned}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda)\Big)(y)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f(A_\lambda)(y))\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\Big(\lambda\wedge\Big(\bigvee_{f(x)=y}A_\lambda(x)\Big)\Big)\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\Big(\bigvee_{f(x)=y}(\lambda\wedge A_\lambda(x))\Big)\\&=\bigvee_{f(x)=y}\Big(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(x))\Big)\\&=\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=f(\widetilde{A})(y),\end{aligned}$$

所以

$$f(\widetilde{A})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda).$$

由定理 2.1.1(1)和推论 1.2.1 知 $a)$ $b)$ $c)$成立.

$d)$ 如果 $\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\max_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)$, 则存在 $x_0\in X, f(x_0)=y$ 有

$$\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\widetilde{A}(x_0).$$

于是

$$\begin{aligned}
f(\widetilde{A})_\lambda &= \{y; f(\widetilde{A})(y)\geqslant\lambda\} \\
&= \{y; \bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)\geqslant\lambda\} \\
&= \{y; \exists\ x_0\in X, f(x_0)=y, \widetilde{A}(x_0)\geqslant\lambda\} \\
&= \{y; \exists\ x_0\in A_\lambda, f(x_0)=y\} \\
&= f(A_\lambda).
\end{aligned}$$

反之,对任何 $y\in f(\widetilde{A})_\lambda$,有

$$\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=f(\widetilde{A})(y)\geqslant\lambda.$$

于是,由 $f(\widetilde{A})_\lambda=f(A_\lambda)$知,$y\in f(A_\lambda)$,即存在 $x_0\in A_\lambda, f(x_0)=y$. 从而

$$\widetilde{A}(x_0)\geqslant\lambda.$$

故

$$\bigvee_{f(x)=y}\widetilde{A}(x)=\max_{f(x)=y}\widetilde{A}(x).$$

(2) 由于对任何 $x\in X$,

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda)\right)(y) &= \bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f^{-1}(B_\lambda)(x)) \\
&= \bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge B_\lambda(f(x))) \\
&= \widetilde{B}(f(x))=f^{-1}(\widetilde{B})(x),
\end{aligned}$$

所以

$$f^{-1}(\widetilde{B})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda).$$

由定理 2.1.1(2)和推论 1.2.1 知

$$f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f^{-1}(B_\lambda)\subset f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda;$$

$$f^{-1}(\widetilde{B})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}f^{-1}(B_\alpha);$$

$$f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} f^{-1}(B_\alpha).$$

下面我们证明 $f^{-1}(\tilde{B})_\lambda = f^{-1}(B_\lambda)$. 事实上,由定理 2.1.1(6)和定理 1.2.5 知

$$f^{-1}(\tilde{B})_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} f^{-1}(B_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha<\lambda} B_\alpha\right) = f^{-1}(B_\lambda).$$

类似地,我们有

定理 2.1.3 设 $f: X \to Y, x \mapsto f(x)$,

(1) 如果 $\tilde{A} \in \mathscr{F}(X)$,则

$$f(\tilde{A}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}),$$

且

a) $f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}) \subset f(\tilde{A})_\lambda$;

b) $f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} f(A_{\underset{\cdot}{\alpha}}) = f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$;

c) $f(\tilde{A})_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} f(A_{\underset{\cdot}{\alpha}})$;

(2) 如果 $\tilde{B} \in \mathscr{F}(Y)$,则

$$f^{-1}(\tilde{B}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}),$$

且

d) $f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset f^{-1}(B_\lambda) \subset f^{-1}(\tilde{B})_\lambda$;

e) $f^{-1}(\tilde{B})_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}})$;

f) $f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}}) = f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$.

证明 我们只要证明

$$f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$$

$$f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}).$$

事实上,由定理 2.1.1 及定理 1.2.5 知

$$f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} f(A_{\underset{\cdot}{\alpha}}) = f\left(\bigcup_{\alpha>\lambda} A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\right) = f(A_{\underset{\cdot}{\lambda}});$$

$$f^{-1}(\tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\alpha}}) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha>\lambda} B_{\underset{\cdot}{\alpha}}\right) = f^{-1}(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}).$$

进一步地,我们还有

定理 2.1.4 设 $f: X \to Y, x \mapsto f(x)$,

(1) 如果 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X)$,且存在 $\{H_{\widetilde{A}}\} \in \mathscr{H}(X)$ 使得 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset H_{\widetilde{A}}(\lambda) \subset A_{\lambda} (\lambda \in [0,1])$,则

$$f(\widetilde{A}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(H_{\widetilde{A}}(\lambda)),$$

且

a) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset f(H_{\widetilde{A}}(\lambda)) \subset f(\widetilde{A})_{\lambda}$;

b) $f(\widetilde{A})_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} f(H_{\widetilde{A}}(\alpha))$;

c) $f(\widetilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} f(H_{\widetilde{A}}(\alpha))$.

(2) 如果 $\widetilde{B} \in \mathscr{F}(Y)$,且存在 $\{H_{\widetilde{B}}\} \in \mathscr{H}(Y)$ 使得 $B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset H_{\widetilde{B}}(\lambda) \subset B_{\lambda} (\lambda \in [0,1])$,则

$$f^{-1}(\widetilde{B}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\lambda)),$$

且

d) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\lambda)) \subset f^{-1}(\widetilde{B})_{\lambda}$,

e) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\lambda} = \bigcap_{\alpha < \lambda} f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\alpha))$,

f) $f^{-1}(\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha > \lambda} f^{-1}(H_{\widetilde{B}}(\alpha))$.

定理 2.1.5 设 $f: X \to Y$, f 和 f^{-1} 有性质:

(1) 如果 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X)$,则

$$f^{-1}(f(\widetilde{A})) \supset \widetilde{A}.$$

特别地,当 f 是单射时,

$$f^{-1}(f(\widetilde{A})) = \widetilde{A}.$$

(2) 如果 $\widetilde{B} \in \mathscr{F}(Y)$,则

$$f(f^{-1}(\widetilde{B})) \subset \widetilde{B},$$

特别地,当 f 是满射时,

$$f(f^{-1}(\widetilde{B})) = \widetilde{B}.$$

证明 (1) 由于对任何 $x \in X$,

$$f^{-1}(f(\widetilde{A}))(x) = f(\widetilde{A})(f(x)) = \bigvee_{f(x') = f(x)} \widetilde{A}(x')$$

$$= \begin{cases} \geqslant \tilde{A}(x) & \text{当 } f \text{ 不是单射;} \\ = \tilde{A}(x) & \text{当 } f \text{ 是单射.} \end{cases}$$

从而

$$f^{-1}(f(\tilde{A})) = \begin{cases} \supset \tilde{A} & \text{当 } f \text{ 不是单射;} \\ = \tilde{A} & \text{当 } f \text{ 是单射.} \end{cases}$$

(3) 由于对任何 $y \in Y$,

$$f(f^{-1}(\tilde{B}))(y) = \bigvee_{f(x)=y} f^{-1}(\tilde{B})(x) = \bigvee_{f(x)=y} \tilde{B}(f(x))$$

$$= \begin{cases} \tilde{B}(y) & \text{当 } f \text{ 是满射;} \\ \leqslant \tilde{B}(y) & \text{当 } f \text{ 不是满射.} \end{cases}$$

于是

$$f(f^{-1}(\tilde{B})) = \begin{cases} \tilde{B} & \text{当 } f \text{ 是满射;} \\ \subset \tilde{B} & \text{当 } f \text{ 不是满射.} \end{cases}$$

定理 2.1.6 设 $f: X \to Y, g: Y \to Z, g \circ f: X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. 我们有

(1) 如果 $\tilde{A} \in \mathscr{F}(X)$,则

$$g(f(\tilde{A})) = (g \circ f)(\tilde{A}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda g(f(A_\lambda)).$$

(2) 如果 $\tilde{C} \in \mathscr{F}(Z)$,则

$$f^{-1}(g^{-1}(\tilde{C})) = (g \circ f)^{-1}(\tilde{C}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(g^{-1}(C_\lambda)).$$

证明 (1)因为,

$$\begin{aligned} g(f(A_\lambda)) &= \{z; \exists\ y \in f(A_\lambda), g(y) = z\} \\ &= \{z; \exists\ x \in A_\lambda, f(x) = y, g(y) = z\} \\ &= \{z; \exists\ x \in A_\lambda, g(f(x)) = z\} \\ &= \{z; \exists\ x \in A_\lambda, (g \circ f)(x) = z\} = (g \circ f)(A_\lambda). \end{aligned}$$

于是

$$(g \circ f)(\tilde{A}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (g \circ f)(A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda g(f(A_\lambda)).$$

又由于

$$f(\tilde{A}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda), \text{且 } f(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset f(A_\lambda) \subset f(\tilde{A})_\lambda.$$

由定理 2.1.4 知

$$g(f(\widetilde{A}))=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda))=(g\circ f)(\widetilde{A}).$$

(2) 类似可证.

定义 2.1.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$, $\widetilde{B}\in\mathscr{F}(Y)$, 记

$$\widetilde{A}\times\widetilde{B}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda\times B_\lambda)$$

称为 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的卡氏积.

定理 2.1.7 $(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)=\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(y)$.

证明 因为

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(A_\lambda\times B_\lambda)(x,y))\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(A_\lambda(x)\wedge B_\lambda(y)))\\&\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge A_\lambda(x)=\widetilde{A}(x).\end{aligned}$$

同理

$$(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)\leqslant\widetilde{B}(y).$$

于是

$$(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)\leqslant\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(x).$$

假设<成立,则存在 α 使得

$$(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)<\alpha<\widetilde{A}(x)\wedge\widetilde{B}(x).$$

因此,对任何 $\lambda\in[0,1]$有

$$\lambda\wedge A_\lambda(x)\wedge B_\lambda(y)<\alpha.$$

从而,当 $\lambda\geqslant\alpha$ 时,

$$A_\lambda(x)=0 \text{ 或 } B_\lambda(y)=0.$$

我们不妨设 $A_\alpha(x)=0$. 则 $A_\lambda(x)=0(\lambda\geqslant\alpha)$, 于是

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda\wedge A_\lambda(x)\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,\alpha)}\lambda\wedge A_\lambda(x)\\&\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,\alpha)}\lambda=\alpha,\end{aligned}$$

故

$$\widetilde{A}(x) \wedge \widetilde{B}(y) \leqslant \widetilde{A}(x) \leqslant a,$$

得到矛盾！说明结论是正确的．

定理 2.1.8 设 $f: X\times Y\rightarrow Z \qquad (x,y)\mapsto f(x,y)$.

(1) 如果 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\widetilde{B}\in\mathscr{F}(Y)$，则

$$f(\widetilde{A}\times\widetilde{B}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(A_\lambda\times B_\lambda),$$

且

a) $f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f(A_\lambda\times B_\lambda)\subset f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_\lambda$;

b) $f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_\lambda=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} f(A_\alpha\times B_\alpha)$;

特别地，$f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_\lambda=f(A_\lambda\times B_\lambda)$的充要条件是

$$\bigvee_{f(x,y)=z}(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y)=\max_{f(x,y)=z}(\widetilde{A}\times\widetilde{B})(x,y),$$

c) $f(\widetilde{A}\times\widetilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} f(A_\alpha\times B_\alpha)$.

其中 $f(A_\lambda\times B_\lambda)=\{z;\exists\ x\in A_\lambda, y\in B_\lambda, z=f(x,y)\}$.

证明 由定理 2.1.7，类似定理 2.1.2 可证．

2.1.2 模糊数的定义及性质

设 R 表示全体实数，$\mathscr{F}(R)$表示实数上的全体模糊集合．

定义 2.1.4 设 $\widetilde{a}\in\mathscr{F}(R)$，称 $\widetilde{a}$ 为一个模糊数，如果它满足条件：

(1) $\widetilde{a}$ 是正规的，即存在 $x_0\in R$，使得 $\widetilde{a}(x_0)=1$；

(2) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，a_λ 是有界闭区间，记为$[a_\lambda^-, a_\lambda^+]$.

记 $\mathscr{F}^*(R)=\{\widetilde{a};\widetilde{a}$ 是模糊数$\}$.

由模糊集合的分解定理，对于任何 $\widetilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，有

$$\widetilde{a}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^-, a_\lambda^+].$$

例 2.1.1 设 $a\in R$，我们定义

$$a(x)=\begin{cases}1, & x=a;\\ 0, & x\neq a.\end{cases}$$

则 $a\in\mathscr{F}^*(R)$，且

$$a = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[a,a].$$

例 2.1.2 设 $a,b \in R$，我们定义

$$[a,b](x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b]. \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

则 $[a,b] \in \mathscr{F}^*(R)$，且

$$[a,b] = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[a,b].$$

定义 2.1.5 设 $\tilde{a} \in \mathscr{F}(R)$，称 $\tilde{a}$ 为模糊凸的，如果对于任何 $x,y \in R$，有

$$\tilde{a}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \tilde{a}(x) \wedge \tilde{a}(y). \quad (\lambda \in [0,1])$$

定理 2.1.9 设 $\tilde{a} \in \mathscr{F}(R)$，$\tilde{a}$ 是模糊凸的充分必要条件为对于任意 $\lambda \in [0,1]$，a_λ 是凸集．

证明 设 $\tilde{a}$ 是模糊凸的．由于

$$a_\lambda = \{x;\tilde{a}(x) \geqslant \lambda\},$$

所以，当 $x,y \in a_\lambda$ 时，有

$$\tilde{a}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \tilde{a}(x) \wedge \tilde{a}(y) \geqslant \lambda.$$

故 $\alpha x+(1-\alpha)y \in a_\lambda$. 即 a_λ 是凸集．反之，如果对于任何 $\lambda \in [0,1]$，a_λ 是凸集，则对于任何 $x,y \in R$，令 $\alpha = \tilde{a}(x) \wedge \tilde{a}(y)$，有

$$x \in a_\alpha \text{ 和 } y \in a_\alpha.$$

由于 a_α 是凸集，则对于任何 $\lambda \in [0,1]$，有

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in a_\alpha.$$

于是

$$\tilde{a}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \alpha = \tilde{a}(x) \wedge \tilde{a}(y).$$

即 $\tilde{a}$ 是模糊凸的．

定理 2.1.10 设 $\tilde{a} \in \mathscr{F}^*(R)$，则 $\tilde{a}$ 是模糊凸的．

证明 由定理 2.1.9 即得．

定理 2.1.11 设 $\tilde{a} \in \mathscr{F}(R)$，则 $\tilde{a}$ 是模糊数的充分必要条件是

$$\tilde{a}(x)=\begin{cases}1, & x\in[m,n]\neq\varnothing.\\ L(x), & x<m.\\ R(x), & x>n.\end{cases}$$

其中 $L(x)$是右连续的单调不减函数,$0\leqslant L(x)<1$,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}L(x)=0$;$R(x)$是左连续的单调不增函数,$0\leqslant R(x)<1$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$.

证明 必要性. 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}'(R)$.

1) 由于 $\tilde{a}$ 是正规的,所以 $a_1=[a_1^-,a_1^+]=[m,n]\neq\varnothing$.

2) 当 $x<m$ 时,令 $L(x)=\tilde{a}(x)$,则 $0\leqslant L(x)<1$,设 $x_1<x_2\leqslant m$,令 $\alpha=\tilde{a}(x_1)$,由于 $\tilde{a}(m)=1$,则

$$[x_1,m]<a_\alpha.$$

于是 $x_2\in a_\alpha$,从而 $L(x_2)\geqslant\alpha=L(x_1)$. 所以,$L(x)(x<m)$是单调不减的.

往证 $L(x)$是右连续的. 假若不然,存在 $x_0<m$ 使得

$$\lim_{x\to x_0}L(x)=\alpha>L(x_0).$$

于是对于任何 $x\in(x_0,m)$,有 $L(x)\geqslant\alpha$ 而 $L(x_0)<\alpha$. 由实数稠密性,存在 λ 使得 $L(x_0)<\lambda<\alpha$. 因此对任何 $x\in(x_0,m)$有 $x\in a_\lambda$ 而 $x_0\notin a_\lambda$. 取 $x_n'=x_0+\dfrac{m-x_0}{n+1}$,则 $x_0<x_n'<m$,所以,由 a_λ 的闭凸性知,$x_n'\in a_\lambda$,$n=1,2,\cdots$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'\in a_\lambda$. 得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$ 矛盾.

往证 $\lim\limits_{x\to-\infty}L(x)=0$. 假若不然,由于 $L(x)$是单调有界函数,于是 $\lim\limits_{x\to-\infty}L(x)=\alpha>0$,对于任何 $x<m$,由于 $L(x)$是单调不减的,所以

$$\tilde{a}(x)=L(x)\geqslant\alpha.$$

于是 a_α 是无界集,矛盾!

3) 同理可证,当 $x>n$ 时,令 $R(x)=\tilde{a}(x)$,则 $0\leqslant R(x)<1$,$R(x)$是单调不增左连续函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$.

充分性.

1) 由于 $a_1=[m,n]\neq\varnothing$,所以 $\tilde{a}$ 是正规的.

2) 对于任何 $\lambda\in(0,1)$,令

$$a_\lambda^- = \wedge\{x;L(x)\geqslant\lambda\},\quad a_\lambda^+=\vee\{x;R(x)\geqslant\lambda\}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}L(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$,所以,$[a_\lambda^-,a_\lambda^+]$是有限闭区间,且 $a_1\subset[a_\lambda^-,a_\lambda^+]$. 经证 $a_\lambda=[a_\lambda^-,a_\lambda^+]$. 事实上,对于任何 $x\in[a_\lambda^-,a_\lambda^+]$,如果 $x\in[m,n]$,则 $\tilde{a}(x)=1\geqslant\lambda$;如果 $x\in(a_\lambda^-,m)$,则一定存在 $a_\lambda^-<x_1<x$ 使得 $L(x_1)\geqslant\lambda$. 否则 $\wedge\{x;L(x)\geqslant\lambda\}\geqslant x_1>a_\lambda^-$,矛盾. 从而根据 $L(x)$的单调不减性,有

$$\tilde{a}(x)=L(x)\geqslant L(x_1)\geqslant\lambda.$$

故 $x\in a_\lambda$,于是$(a_\lambda^-,m)\subset a_\lambda$. 如果 $x=a_\lambda^-$,根据 $L(x)$的右连续性,有

$$\tilde{a}(a_\lambda^-)=\lim_{x\to a_\lambda^{-}+} L(x)\geqslant\lambda.$$

故$[a_\lambda^-,m)\subset a_\lambda$;同样可证明,$(n,a_\lambda^+]\subset a_\lambda$. 于是,

$$[a_\lambda^-,a_\lambda^+]\subset a_\lambda.$$

另一方面,如果 $x\notin[a_\lambda^-,a_\lambda^+]$,则 $x<a_\lambda^-$ 或 $x>a_\lambda^+$,如果 $x<a_\lambda^-$,则

$$x<\wedge\{x;L(x)\geqslant\lambda\}$$

于是

$$\tilde{a}(x)=L(x)<\lambda;$$

如果 $x>a_\lambda^+$,则

$$x>\vee\{x;R(x)\geqslant\lambda\},$$

于是

$$\tilde{a}(x)=R(x)<\lambda.$$

从而,我们都有 $x\notin a_\lambda$. 这样,我们就证明了对于任何 $\lambda\in(0,1)$,

$$a_\lambda=[a_\lambda^-,a_\lambda^+].$$

由定义 2.1.4 知 $\tilde{a}$ 是一个模糊数.

由上述定理可知,一个模糊数 $\tilde{a}$ 可以由$[m_{\tilde{a}},n_{\tilde{a}}]=a_1$ 及$L_{\tilde{a}}(x)$,

$R_{\tilde a}(x)$唯一确定．记

$$\tilde a = ([m_{\tilde a}, n_{\tilde a}], L_{\tilde a}, R_{\tilde a}).$$

定理 2.1.12 (模糊数的表现定理)设

$H:(0,1]\to\mathscr{K}^*(R)=\{[a,b];a\leqslant b,a,b\in R\},\lambda\mapsto H(\lambda)=[m_\lambda,n_\lambda]$,则

(1) $\tilde a=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\in\mathscr{F}^*(R)$;

(2) $a_\lambda=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}H(\lambda_n)(\lambda\in(0,1])\left(\lambda_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\lambda\right)$;

(3) $\tilde a=([m_{\tilde a},n_{\tilde a}],L_{\tilde a},R_{\tilde a})$,

其中

$$m_{\tilde a}=\lim_{n\to\infty}m_{\lambda'_n},n_{\tilde a}=\lim_{n\to\infty}n_{\lambda'_n}\left(\lambda'_n=1-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$L_{\tilde a}(x)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda;m_\lambda\leqslant x\},$$

$$R_{\tilde a}(x)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda;n_\lambda\geqslant x\}.$$

证明 令 $H(0)=R$,则$\{H\}\in\mathscr{K}(R)$. 由模糊集合的表现定理知$\{H\}$唯一确定模糊集

$$\tilde a=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda H(\lambda)\in\mathscr{F}(R).$$

且

$$a_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{0<\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{0<\alpha<\lambda}[m_\alpha,n_\alpha],\quad(\lambda\in(0,1]).$$

(1) 由于闭区间的任意交仍为闭区间,所以 a_λ 仍为闭区间($\lambda\in(0,1]$),且 $a_1\supset H(1)=[m_1,n_1]\neq\varnothing$,于是 $\tilde a\in\mathscr{F}^*(R)$.

(2) 由于 $0<\lambda_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\lambda<\lambda$,所以

$$a_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\lambda_n).$$

另一方面,又由于 $H(\lambda_n)\subset a_{\lambda_n}$,所以,由定理 1.2.4,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\lambda_n)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}a_{\lambda_n}=a_{\left(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)}=a_\lambda.$$

结合两方面,我们有

$$a_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\lambda_n).$$

(3) 由(2)知 $a_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(\lambda_n') = \bigcap_{n=1}^{\infty} [m_{\lambda_n'}, n_{\lambda_n'}]$. 由于 $\{H\} \in \mathscr{H}(R)$，所以 $m_{\lambda_n'}$ 是单调不减的，且 $m_{\lambda_n'} \leqslant m_1$，$n_{\lambda_n'}$ 是单调不增的，且 $n_{\lambda_n'} \geqslant n_1$. 于是有

$$m_{\tilde{a}} = \lim_{n\to\infty} m_{\lambda_n'}, \qquad n_{\tilde{a}} = \lim_{n\to\infty} n_{\lambda_n'}.$$

且对于任何 $n \geqslant 1$，

$$m_{\lambda_n'} \leqslant m_{\tilde{a}} \leqslant n_{\tilde{a}} \leqslant n_{\lambda_n'}.$$

因此，我们可以证明

$$a_1 = [m_{\tilde{a}}, n_{\tilde{a}}].$$

当 $x < m_{\tilde{a}}$ 时，由定理 2.1.11，

$$\begin{aligned} L_{\tilde{a}}(x) = \tilde{a}(x) &= \bigvee_{\lambda \in (0,1]} (\lambda \wedge H(\lambda)(x)) \\ &= \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda; x \in H(\lambda)\} \\ &= \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda; x \in [m_\lambda, n_\lambda]\} \\ &= \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda; x \geqslant m_\lambda\}, \end{aligned}$$

同理可证，当 $x > n_{\tilde{a}}$ 时，

$$R_{\tilde{a}}(x) = \bigvee_{0<\lambda<1} \{\lambda; x \leqslant n_\lambda\}.$$

2.1.3 模糊数的序及运算

定义 2.1.6 设 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathscr{F}^*(R)$，称 $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$，如果对于任意 $\lambda \in (0,1]$ 有

$$a_\lambda^- \leqslant b_\lambda^- \text{ 和 } a_\lambda^+ \leqslant b_\lambda^+;$$

称 $\tilde{a} < \tilde{b}$，如果 $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$，且存在 $\lambda_0 \in (0,1]$ 使得

$$a_{\lambda_0}^- < b_{\lambda_0}^- \text{ 或 } a_{\lambda_0}^+ < b_{\lambda_0}^+;$$

称 $\tilde{a} = \tilde{b}$，如果 $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$ 且 $\tilde{b} \leqslant \tilde{a}$.

命题 2.1.1 $(\mathscr{F}^*(R),\leqslant)$是一偏序集．

证明 显然．

命题 2.1.2 设 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}=\tilde{b}$的充分必要条件是对任何 $\lambda\in(0,1]$，$a_\lambda^-=b_\lambda^-$ 和 $a_\lambda^+=b_\lambda^+$．

证明 显然．

定义 2.1.7 设 $*$ 为 R 上的二元运算，

$$*:R\times R\to R\qquad (x,y)\mapsto z=x*y,$$

扩张运算为

$$*:\mathscr{F}^*(R)\times\mathscr{F}^*(R)\to\mathscr{F}^*(R),$$

$$(\tilde{a},\tilde{b})\mapsto\tilde{a}*\tilde{b}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(a_\lambda*b_\lambda).$$

其隶属函数为

$$(\tilde{a}*\tilde{b})(z)=\bigvee_{z=x*y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y)).$$

特别称

$$(\tilde{a}+\tilde{b})(z)=\bigvee_{z=x+y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y));$$

$$(\tilde{a}-\tilde{b})(z)=\bigvee_{z=x-y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y));$$

$$(\tilde{a}\cdot\tilde{b})(z)=\bigvee_{z=x\cdot y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y));$$

$$(\tilde{a}\div\tilde{b})(z)=\bigvee_{z=x\div y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y));$$

$$(\tilde{a}\wedge\tilde{b})(z)=\bigvee_{z=x\wedge y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y));$$

$$(\tilde{a}\vee\tilde{b})(z)=\bigvee_{z=x\vee y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y)).$$

为扩张加法、扩张减法、扩张乘法、扩张除法、扩张极小运算和扩张极大运算．

例 2.1.3 设

$$\tilde{2}=\int_1^2(x-1)/x+\int_2^3(3-x)/x,$$

则

$$\tilde{2}+\tilde{2}=\int_{2}^{4}\left(\frac{x}{2}-1\right)/x+\int_{4}^{6}\left(3-\frac{x}{2}\right)/x;$$

$$\tilde{2}-\tilde{2}=\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)/x+\int_{0}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)/x;$$

$$\tilde{2}\cdot\tilde{2}=\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-1)/x+\int_{4}^{9}(3-\sqrt{x})/x;$$

$$\tilde{2}\div\tilde{2}=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3-\frac{4}{x+1}\right)/x+\int_{1}^{3}\left(\frac{4}{x+1}-1\right)/x;$$

$$\tilde{2}\wedge\tilde{2}=\int_{1}^{2}(x-1)/x+\int_{2}^{3}(3-x)/x;$$

$$\tilde{2}\vee\tilde{2}=\int_{1}^{2}(x-1)/x+\int_{2}^{3}(3-x)/x.$$

定义 2.1.8 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，如果对于任何 $x\in R, x\leqslant 0$，有 $\tilde{a}(x)=0$，称 $\tilde{a}$ 为正模糊数．如果对于任何 $x\in R, x\geqslant 0$，有 $\tilde{a}(x)=0$，称 $\tilde{a}$ 为负模糊数．

命题 2.1.3 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}$ 是正模糊数的充要条件是 $\tilde{a}>0$；$\tilde{a}$ 是负模糊数的充要条件是 $\tilde{a}<0$.

证明 由定义 2.1.6 及定义 2.1.8 即得．

定理 2.1.13 设 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，则 $\tilde{a}+\tilde{b}$，$\tilde{a}-\tilde{b}$，$\tilde{a}\cdot\tilde{b}$，$\tilde{a}\wedge\tilde{b}$，$\tilde{a}\vee\tilde{b}$ 是正规的．如果 $\tilde{b}$ 是正模糊数或负模糊数，则 $\tilde{a}\div\tilde{b}$ 是正规的．

证明 设 $\tilde{a}(x_0)=1, \tilde{b}(y_0)=1$，令

$$z_1=x_0+y_0,\ z_2=x_0-y_0,\ z_3=x_0\cdot y_0,$$
$$z_4=x_0\wedge y_0,\ z_5=x_0\vee y_0.$$

则，由于

$$(\tilde{a}+\tilde{b})(z_1)=\bigvee_{z_1=x+y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y))\geqslant\tilde{a}(x_0)\wedge\tilde{b}(y_0)=1.$$

所以

$$(\tilde{a}+\tilde{b})(z_1)=1.$$

即 $\tilde{a}+\tilde{b}$ 是正规的．同理可证 $(\tilde{a}-\tilde{b})(z_2)=1$，$(\tilde{a}\cdot\tilde{b})(z_3)=1$，$(\tilde{a}\wedge\tilde{b})(z_4)=1$，$(\tilde{a}\vee\tilde{b})(z_5)=1$. 即它们也都是正规的．

如果 $\tilde{b}$ 是正模糊数，则 $\tilde{b}(y_0)=1>0$，所以 $z_6=x_0\div y_0\in R$. 且

$(\tilde{a}\div\tilde{b})(z_6)=\bigvee_{z_6=x\div y}(\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y))\geqslant\tilde{a}(x_0)\wedge\tilde{b}(y_0)=1$，

从而

$$(\tilde{a}\div\tilde{b})(z_6)=1.$$

即 $\tilde{a}\div\tilde{b}$ 是正规的．同理可证如果 $\tilde{b}$ 是负模糊数时，$\tilde{a}\div\tilde{b}$ 也是正规的．

一般说来，如果 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}\div\tilde{b}$ 未必是正规的．

例 2.1.4 令

$$\tilde{a}=\begin{cases}1, & x=1.\\0, & x\neq 1.\end{cases}$$

$$\tilde{b}=\begin{cases}1, & x=0.\\0, & x\neq 0.\end{cases}$$

则 $\tilde{a}(1)=1$，$\tilde{b}(0)=1$. 但是 $\tilde{a}\div\tilde{b}$ 不是正规的．因为对于任何 $x\in R$，$(\tilde{a}\div\tilde{b})(x)<1$.

定理 2.1.14 设 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$a_\lambda+b_\lambda$，$a_\lambda-b_\lambda$，$a_\lambda\cdot b_\lambda$，$a_\lambda\wedge b_\lambda$，$a_\lambda\vee b_\lambda$ 都是闭区间，如果 $\tilde{b}$ 是正模糊数或负模糊数，则 $a_\lambda\div b_\lambda$ 是闭区间．

证明 由于 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，根据定义 2.1.4，对于任何 $\lambda\in(0,1]$ 我们有

$$a_\lambda=[a_\lambda^-,a_\lambda^+],b_\lambda=[b_\lambda^-,b_\lambda^+].$$

下面我们证明

(1) $a_\lambda+b_\lambda=[a_\lambda^-+b_\lambda^-,a_\lambda^++b_\lambda^+]$；

(2) $a_\lambda-b_\lambda=[a_\lambda^--b_\lambda^+,a_\lambda^+-b_\lambda^-]$；

(3) $a_\lambda \cdot b_\lambda = [\alpha_\lambda^-, \alpha_\lambda^+]$;

(4) $a_\lambda \wedge b_\lambda = [a_\lambda^- \wedge b_\lambda^-, a_\lambda^+ \wedge b_\lambda^+]$;

(5) $a_\lambda \vee b_\lambda = [a_\lambda^- \vee b_\lambda^-, a_\lambda^+ \vee b_\lambda^+]$.

其中

$$\alpha_\lambda^- = \min(a_\lambda^- \cdot b_\lambda^-,\ a_\lambda^- \cdot b_\lambda^+, a_\lambda^+ \cdot b_\lambda^-, a_\lambda^+ \cdot b_\lambda^+);$$

$$\alpha_\lambda^+ = \max(a_\lambda^- \cdot b_\lambda^-,\ a_\lambda^- \cdot b_\lambda^+, a_\lambda^+ \cdot b_\lambda^-, a_\lambda^+ \cdot b_\lambda^+).$$

事实上，(1)由定理 2.1.8 知

$$a_\lambda + b_\lambda = \{z;\text{存在 } x \in a_\lambda, y \in b_\lambda, z = x + y\}.$$

对于任意 $z \in a_\lambda + b_\lambda$. 则存在 $x_0 \in a_\lambda, y_0 \in b_\lambda$ 使得

$$z = x_0 + y_0.$$

由于 $x_0 \in a_\lambda, y_0 \in b_\lambda$，所以

$$a_\lambda^- \leqslant x_0 \leqslant a_\lambda^+, \qquad b_\lambda^- \leqslant y_0 \leqslant b_\lambda^+.$$

故

$$a_\lambda^- + b_\lambda^- \leqslant x_0 + y_0 = z \leqslant a_\lambda^+ + b_\lambda^+.$$

即 $z \in [a_\lambda^- + b_\lambda^-, a_\lambda^+ + b_\lambda^+]$，从而

$$a_\lambda + b_\lambda \subset [a_\lambda^- + b_\lambda^-, a_\lambda^+ + b_\lambda^+].$$

反之，对于任意 $z \in [a_\lambda^- + b_\lambda^-, a_\lambda^+ + b_\lambda^+]$，令 $z = x + y$. 则

$$0 \leqslant (x - a_\lambda^-) + (y - b_\lambda^-) \leqslant (a_\lambda^+ - a_\lambda^-) + (b_\lambda^+ - b_\lambda^-).$$

如果 $(x - a_\lambda^-) + (y - b_\lambda^-) > (a_\lambda^+ - a_\lambda^-)$ 或 $(x - a_\lambda^-) + (y - b_\lambda^-) > (b_\lambda^+ - b_\lambda^-)$，不妨设 $(x - a_\lambda^-) + (y - b_\lambda^-) > a_\lambda^+ - a_\lambda^-$，我们取 $x = a_\lambda^+$. 则

$$0 < y - b_\lambda^- \leqslant b_\lambda^+ - b_\lambda^-.$$

从而 $b_\lambda^- < y \leqslant b_\lambda^+$. 即 $x \in a_\lambda, y \in b_\lambda$，且 $z = x + y \in a_\lambda + b_\lambda$. 如果 $(x - a_\lambda^-) + (y - b_\lambda^-) \leqslant (a_\lambda^+ - a_\lambda^-)$ 且 $(x - a_\lambda^-) + (y - b_\lambda^-) \leqslant b_\lambda^+ - b_\lambda^-$，我们取 $x = a_\lambda^-$. 则

$$0 \leqslant y - b_\lambda^- \leqslant b_\lambda^+ - b_\lambda^-.$$

从而 $b_\lambda^- \leqslant y \leqslant b_\lambda^+$，即 $x \in a_\lambda, y \in b_\lambda$，且 $z = x + y \in a_\lambda + b_\lambda$. 故

$$a_\lambda + b_\lambda \supset [a_\lambda^- + b_\lambda^-, a_\lambda^+ + b_\lambda^+].$$

(2)(3)(4)(5)可以同理证明.

如果$\tilde{b}$是正模糊数，则 $b_\lambda^- > 0$. 于是我们可以证明

$$a_\lambda \div b_\lambda = [a_\lambda^- / b_\lambda^+, a_\lambda^+ / b_\lambda^-].$$

是闭区间. 如果$\tilde{b}$是负模糊数，则 $b_\lambda^+ < 0$，于是我们也可以证明

$$a_\lambda \div b_\lambda = [a_\lambda^- / b_\lambda^+, a_\lambda^+ / b_\lambda^-]$$

是闭区间.

一般说来，如果 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathscr{F}^*(R)$，$a_\lambda \div b_\lambda$ 未必是闭区间.

例 2.1.5 令

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} 1, & x = 1. \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$$

$$\tilde{b}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1]. \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

则对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$a_\lambda = [1,1]$，$b_\lambda = [-1,1]$，但

$$a_\lambda \div b_\lambda = [-\infty, -1] \cup [1, +\infty].$$

定理 2.1.15 设 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathscr{F}^*(R)$，则

$$\tilde{a} + \tilde{b}, \tilde{a} - \tilde{b}, \tilde{a} \cdot \tilde{b}, \tilde{a} \wedge \tilde{b}, \tilde{a} \vee \tilde{b} \in \mathscr{F}^*(R).$$

如果$\tilde{b}$是正模糊数或负模糊数，则 $\tilde{a} \div \tilde{b} \in \mathscr{F}^*(R)$.

证明 (1) 由定理 2.1.13，$\tilde{a}+\tilde{b}, \tilde{a}-\tilde{b}, \tilde{a}\cdot\tilde{b}, \tilde{a}\wedge\tilde{b}, \tilde{a}\vee\tilde{b}$是正规的. 如果$\tilde{b}$是正模糊数或负模糊数，则 $\tilde{a} \div \tilde{b}$也是正规的.

(2) 由定理 2.1.14，对于任意 $\lambda \in (0,1]$，$a_\lambda + b_\lambda, a_\lambda - b_\lambda, a_\lambda \cdot b_\lambda, a_\lambda \wedge b_\lambda, a_\lambda \vee b_\lambda$ 都是闭区间，如果$\tilde{b}$是正模糊数或负模糊数，$a_\lambda \div b_\lambda$ 也是闭区间，所以我们只须证明

$$(\tilde{a} + \tilde{b})_\lambda = a_\lambda + b_\lambda;$$

$$(\tilde{a} - \tilde{b})_\lambda = a_\lambda - b_\lambda;$$

$$(\tilde{a} \cdot \tilde{b})_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda;$$

$$(\tilde{a} \wedge \tilde{b})_\lambda = a_\lambda \wedge b_\lambda;$$

$$(\tilde{a} \vee \tilde{b})_\lambda = a_\lambda \vee b_\lambda;$$

$$(\tilde{a} \div \tilde{b})_\lambda = a_\lambda \div b_\lambda.$$

由定理 2.1.8,我们只要证明四则运算和极大和极小运算“$*$”满足

$$\bigvee_{z=x*y} (\tilde{a}(x) \wedge \tilde{b}(y)) = \max_{z=x*y} (\tilde{a}(x) \wedge \tilde{b}(y))$$

即可．事实上．设 $\bigvee_{z=x*y}(\tilde{a}(x) \wedge \tilde{b}(y)) = \alpha$. 如果 $\alpha=0$,显然存在 $x_0, y_0, z=x_0 * y_0$,有 $\tilde{a}(x_0) \wedge \tilde{b}(y_0)=0$. 如果 $\alpha>0$,则由实数稠密性,存在 n_0 使得 $\alpha-\frac{1}{n_0}>0$. 由 α 的定义,对于任何 $n>n_0$,存在(x_n, y_n)满足 $z=x_n * y_n$ 且

$$\tilde{a}(x_n) \wedge \tilde{b}(y_n) > \alpha - \frac{1}{n} > \alpha - \frac{1}{n_0}.$$

于是$\{x_n\} \subset a_{\alpha-\frac{1}{n_0}}$, $\{y_n\} \subset b_{\alpha-\frac{1}{n_0}}$. 又由于 $a_{\alpha-\frac{1}{n_0}}$是闭区间,$b_{\alpha-\frac{1}{n_0}}$也是闭区间,所以,存在子列

$$x_{n_k} \to x_0 \qquad y_{n_k} \to y_0.$$

因为 $\tilde{a}(x_{n_k}) > \alpha - \frac{1}{n_k}$,故对于任意给定的 n',当 k 充分大时,有

$$\tilde{a}(x_{n_k}) > \alpha - \frac{1}{n'}.$$

于是

$$x_{n_k} \in a_{\alpha-\frac{1}{n'}}.$$

从而,由 $a_{\alpha-\frac{1}{n}}$是闭区间,

$$x_0 \in a_{\alpha-\frac{1}{n'}}.$$

故，由定理 1.2.4，

$$x_0 \in \bigcap a_{\alpha-\frac{1}{n}} = a_\alpha.$$

同理

$$y_0 \in b_\alpha.$$

这样

$$\widetilde{a}(x_0) \wedge \widetilde{b}(y_0) \geqslant \alpha.$$

又由于“$*$”表示的是四则运算和极小和极大运算，这些运算都是连续的，所以，由 $z = x_{n_k} * y_{n_k}$ 知

$$x_0 * y_0 = z.$$

这样，我们就有

$$\widetilde{a}(x_0) \wedge \widetilde{b}(y_0) = \max_{x*y=z}(\widetilde{a}(x) \wedge \widetilde{b}(y))$$

$$= \bigvee_{z=x*y}(\widetilde{a}(x) \wedge \widetilde{b}(y)).$$

定理 2.1.16 设 $\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c} \in \mathscr{F}^*(R)$，则

(1) $\widetilde{a}+\widetilde{b}=\widetilde{b}+\widetilde{a}$；

(2) $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=\widetilde{b}\cdot\widetilde{a}$；

(3) $(\widetilde{a}+\widetilde{b})+\widetilde{c}=\widetilde{a}+(\widetilde{b}+\widetilde{c})$；

(4) $\widetilde{a}\cdot(\widetilde{b}\cdot\widetilde{c})=(\widetilde{a}\cdot\widetilde{b})\cdot\widetilde{c}$；

(5) $\widetilde{a}+0=\widetilde{a}$；

(6) $\widetilde{a}\cdot 1=\widetilde{a}$.

证明 显然.

注意：(1) 一般地，$\widetilde{a},\widetilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，$(\widetilde{a}-\widetilde{b})+\widetilde{b}\neq\widetilde{a}$，$\widetilde{a}-\widetilde{a}\neq 0$.

例 2.1.6 设

$$\widetilde{a}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

则对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$a_\lambda = [-1,1]$.

$$a_\lambda - a_\lambda = [-1-1, 1-(-1)]$$
$$= [-2, 2].$$

即

$$\tilde{a} - \tilde{a} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[-2, +2] \neq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[0,0] = 0.$$

(2) 一般地,$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathscr{F}^*(R)$,$\tilde{a} \cdot (\tilde{b} + \tilde{c}) \neq \tilde{a} \cdot \tilde{b} + \tilde{a} \cdot \tilde{c}$.

例 2.1.7 设

$$\tilde{a} = \int_2^3 (x-2)/x + \int_3^4 (4-x)/x;$$

$$\tilde{b} = \int_1^2 1/x;$$

$$\tilde{c} = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x+1)/x.$$

则

$$\tilde{a} \cdot (\tilde{b} + \tilde{c}) = \int_0^6 \frac{\sqrt{4+2x} - 2}{2}/x + \int_6^9 1/x + \int_9^{12} \left(4 - \frac{x}{3}\right)/x;$$

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} + \tilde{a} \cdot \tilde{c} = \int_{-2}^{2.5} \frac{5 - \sqrt{21 - 2x}}{2}/x + \int_{2.5}^6 \frac{\sqrt{4+2x} - 2}{2}/x$$
$$+ \int_6^9 1/x + \int_9^{12} \left(4 - \frac{x}{3}\right)/x.$$

于是

$$\tilde{a} \cdot (\tilde{b} + \tilde{c}) \neq \tilde{a} \cdot \tilde{b} + \tilde{a} \cdot \tilde{c}.$$

(3) 一般地,$\tilde{a} \in \mathscr{F}^*(R)$,$\tilde{a} \div \tilde{a} \neq 1$.

例 2.1.8 设

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [+1, 2]. \\ 0, & x \notin [1, 2]. \end{cases}$$

则对于任何 $\lambda \in (0,1]$,$a_\lambda = [1,2]$. 所以

$$a_\lambda \div a_\lambda = [1,2] \div [1,2] = [1/2, 2/1] = \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

于是

$$\tilde{a} \div \tilde{a} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\left[\frac{1}{2},2\right] \neq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[1,1].$$

定理 2.1.17 设 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ 是正模糊数，则

$$\tilde{a}\cdot(\tilde{b}+\tilde{c}) = \tilde{a}\cdot\tilde{b}+\tilde{a}\cdot\tilde{c}.$$

证明 设

$$\tilde{a} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[a_\lambda^-, a_\lambda^+];$$

$$\tilde{b} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[b_\lambda^-, b_\lambda^+];$$

$$\tilde{c} = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[c_\lambda^-, c_\lambda^+].$$

由于 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ 都是正模糊数，所以，对于任意的 $\lambda\in(0,1]$，$a_\lambda^-\geqslant 0$，$b_\lambda^-\geqslant 0$，$c_\lambda^-\geqslant 0$. 从而

$$\begin{aligned}
&[a_\lambda^-, a_\lambda^+]\cdot([b_\lambda^-, b_\lambda^+]+[c_\lambda^-, c_\lambda^+])\\
&=[a_\lambda^-, a_\lambda^+]\cdot[b_\lambda + c_\lambda^-, b_\lambda^+ + c_\lambda^+]\\
&=[a_\lambda^-\cdot(b_\lambda^- + c_\lambda^-),\ a_\lambda^+\cdot(b_\lambda^+ + c_\lambda^+)]\\
&=[a_\lambda^-\cdot b_\lambda^- + a_\lambda^-\cdot c_\lambda^-,\ a_\lambda^+\cdot b_\lambda^+ + a_\lambda^+\cdot c_\lambda^+]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[a_\lambda^-, a_\lambda^+]\cdot[b_\lambda^-, b_\lambda^+]+[a_\lambda^-, a_\lambda^+]\cdot[c_\lambda^-, c_\lambda^+]\\
&=[a_\lambda^-\cdot b_\lambda^-,\ a_\lambda^+\cdot b_\lambda^+]+[a_\lambda^-\cdot c_\lambda^-,\ a_\lambda^+\cdot c_\lambda^+]\\
&=[a_\lambda^-\cdot b_\lambda + a_\lambda\cdot c_\lambda^-,\ a_\lambda^+\cdot b_\lambda^+ + a_\lambda^+\cdot c_\lambda^+].
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
a_\lambda\cdot(b_\lambda + c_\lambda) &= [a_\lambda^-, a_\lambda^+]\cdot([b_\lambda^-, b_\lambda^+]+[c_\lambda^-, c_\lambda^+])\\
&=[a_\lambda^-, a_\lambda^+]\cdot[b_\lambda^-, b_\lambda^+]+[a_\lambda^-, a_\lambda^+]\cdot[c_\lambda^-, c_\lambda^+]\\
&=a_\lambda\cdot b_\lambda + a_\lambda\cdot c_\lambda.
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
(\tilde{a}\cdot(\tilde{b}+\tilde{c}))_\lambda &= a_\lambda\cdot(b_\lambda + c_\lambda) = a_\lambda\cdot b_\lambda + a_\lambda\cdot c_\lambda\\
&=(\tilde{a}\cdot\tilde{b}+\tilde{a}\cdot\tilde{c})_\lambda.
\end{aligned}$$

再由分解定理则证．

定理 2.1.18 设 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\in\mathscr{F}^*(R)$，则

(1) 如果 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b},\tilde{c}\leqslant\tilde{d}$，则 $\tilde{a}+\tilde{c}\leqslant\tilde{b}+\tilde{d}$，进一步地，如果 $\tilde{a}<\tilde{b}$，$\tilde{c}\leqslant\tilde{d}$，则 $\tilde{a}+\tilde{c}<\tilde{b}+\tilde{d}$；

(2) 如果 $\tilde{a}-\tilde{b}\leqslant\tilde{a}+\tilde{c}$，则 $\tilde{b}\leqslant\tilde{c}$，进一步地，如果 $\tilde{a}+\tilde{b}=\tilde{a}+\tilde{c}$，则 $\tilde{b}=\tilde{c}$；

(3) 如果 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b},\tilde{c}\leqslant\tilde{d}$ 且 $\tilde{a}+\tilde{c}=\tilde{b}+\tilde{d}$，则 $\tilde{a}=\tilde{b},\tilde{c}=\tilde{d}$；

(4) 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$0\leqslant\tilde{a}<\varepsilon$，则 $\tilde{a}=0$.

证明 显然.

定义 2.1.8 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，如果对于任何正实数 M，存在 $\lambda\in(0,1]$ 使得 $M\leqslant a_\lambda^+$ 或 $a_\lambda^-\leqslant -M$，则称 $\tilde{a}$ 是模糊无穷大，记为 $\widetilde{\infty}$.

命题 2.1.4 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，则 $\tilde{a}\neq\widetilde{\infty}$ 的充分必要条件是 $\mathrm{supp}\tilde{a}$ 是有界集.

证明 因为 $\tilde{a}\neq\widetilde{\infty}$，则存在 $M>0$ 使得对于任何 $\lambda\in(0,1]$ 有 $-M\leqslant a_\lambda^-\leqslant a_\lambda^+\leqslant M$，从而 $\mathrm{supp}\tilde{a}\subset[-M,M]$. 反之，如果存在 $m,M\in R$ 使得 $\mathrm{supp}\tilde{a}\subset[m,M]$，则

$$-\max(|m|,|M|)\leqslant\inf a_\lambda^-\leqslant\sup a_\lambda^+\leqslant\max(|m|,|M|),$$

从而 $\tilde{a}\neq\widetilde{\infty}$.

定义 2.1.9 设 $A\subset\mathscr{F}^*(R)$，如果存在 $\tilde{M}\in\mathscr{F}^*(R)(\tilde{M}\neq\widetilde{\infty})$，使得对于任何 $\tilde{a}\in A$，有 $\tilde{a}\leqslant\tilde{M}$，称 $\tilde{M}$ 为 A 的上界；如果存在 $\tilde{m}\in\mathscr{F}^*(R)(\tilde{m}\neq\widetilde{\infty})$，使得对于任何 $\tilde{a}\in A$，有 $\tilde{m}\leqslant\tilde{a}$，称 $\tilde{m}$ 为 A 的下界，如果 A 既有上界又有下界，称 A 是有界的.

定义 2.1.10 设 $A\subset\mathscr{F}^*(R)$. $\tilde{M}\in\mathscr{F}^*(R)(\tilde{M}\neq\widetilde{\infty})$. 称 $\tilde{M}$ 为 A 的上确界. 如果 $\tilde{M}$ 具有性质：

(1) 对于任何 $\tilde{a}\in A$，有 $\tilde{a}\leqslant\tilde{M}$；

(2) 对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\tilde{a}\in A$ 使得 $\tilde{M}<\tilde{a}+\varepsilon$.
如果 $\tilde{M}$ 是 A 的上确界，记 $\tilde{M}=\sup A$.

类似地，我们定义

定义 2.1.11 设 $A\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{m}\in\mathscr{F}^*(R)(\tilde{m}\neq\tilde{\infty})$. 称 $\tilde{m}$ 为 A 的下确界，如果 $\tilde{m}$ 具有性质：

(1) 对于任何 $\tilde{a}\in A$，有 $\tilde{m}\leqslant\tilde{a}$；

(2) 对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\tilde{a}\in A$ 使得 $\tilde{a}-\varepsilon<\tilde{m}$. 如果 $\tilde{m}$ 是 A 的下确界，记 $\tilde{m}=\inf A$.

一般地，一个模糊数集有界不一定有上确界和下确界.

例 2.1.9 令

$$\tilde{a}(x)=\begin{cases}1, & x=1.\\ 0, & x\neq 1.\end{cases}$$

$$\tilde{b}(x)=\begin{cases}0, & x<0.\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1.\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

则 $\tilde{a}$ 与 $\tilde{b}$ 的最小上界为 $\tilde{a}\vee\tilde{b}$，即

$$(\tilde{a}\vee\tilde{b})(x)=\begin{cases}0, & x<1.\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

但 $A=\{\tilde{a},\tilde{b}\}$ 不存在上确界. $\tilde{a}$ 与 $\tilde{b}$ 的最大下界为 $\tilde{a}\wedge\tilde{b}$，即

$$(\tilde{a}\wedge\tilde{b})(x)=\begin{cases}0, & x<0.\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1.\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

但 A 不存在下确界.

命题 2.1.5 设 $A\subset\mathscr{F}^*(R)$，如果存在 $\tilde{a}\in A$ 是 A 的上界(分别地，下界)，则 $\sup A$(分别地，$\inf A$)一定存在，且

$$\tilde{a}=\sup A\text{（分别地，}\tilde{a}=\inf A\text{）}.$$

证明 显然．

定理 2.1.19 设 $A\subset\mathscr{F}^{*}(R)$，如果 $\sup A$（分别地，$\inf A$）存在，则

(1) $$\sup A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-,\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^+\right]=\bigvee_{\tilde{a}\in A}\tilde{a};$$

(2) $$\inf A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\inf_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-,\inf_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^+\right]=\bigwedge_{\tilde{a}\in A}\tilde{a}.$$

其中“$\vee$”表示极大运算，“$\wedge$”表示极小运算．

证明 对任何 $\tilde{a}\in A$，因为 $\tilde{a}\leqslant\sup A$，所以对于任意 $\lambda\in(0,1]$

$$a_\lambda^-\leqslant(\sup A)_\lambda^-\text{ 和 }a_\lambda^+\leqslant(\sup A)_\lambda^+.$$

于是

$$\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-\leqslant(\sup A)_\lambda^-\text{ 和 }\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^+\leqslant(\sup A)_\lambda^+.$$

从而

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-,\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^+\right]\leqslant\sup A.$$

反之，对于任意给定 $\varepsilon>0$，由定义 2.1.10 存在 $\tilde{a}\in A$ 使得

$$\sup A<\tilde{a}+\varepsilon.$$

因此，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，有

$$(\sup A)_\lambda^-\leqslant(\tilde{a}+\varepsilon)_\lambda^-=a_\lambda^-+\varepsilon$$

$$\text{和}(\sup A)_\lambda^+\leqslant(\tilde{a}+\varepsilon)_\lambda^+=a_\lambda^++\varepsilon.$$

于是

$$(\sup A)_\lambda^-\leqslant\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-+\varepsilon\text{ 和 }(\sup A)_\lambda^+\leqslant\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^++\varepsilon.$$

又由于 ε 的任意性，所以，对任何 $\lambda\in(0,1]$ 我们有

$$(\sup A)_\lambda^-\leqslant\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-\quad\text{和}\quad(\sup A)_\lambda^+\leqslant\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^+.$$

从而

$$\sup A\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-,\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^+\right].$$

结合两方面，我们得到

$$\sup A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^-,\sup_{\tilde{a}\in A}a_\lambda^+\right].$$

(2) 可以类似证明.

命题 2.1.6 设 $A\subset B\subset\mathscr{F}^*(R)$,如果 $\inf B$ 和 $\inf A$(分别地,$\sup A$ 和 $\sup B$)存在,则 $\inf A\geqslant\inf B$(分别地,$\sup B\geqslant\sup A$).

证明 显然.

定理 2.1.20 $\mathscr{F}^*(R)$按照极大、极小运算构成一个稠密格.

证明 由定理 2.1.16 知极大、极小运算满足交换律和结合律.根据文献 4[张文修著《模糊数学基础》]定理 2.1.2 知,我们只要证明对于任何 $\tilde a,\tilde b\in\mathscr{F}^*(R)$

$$\tilde a\wedge(\tilde a\vee\tilde b)=\tilde a,\quad \tilde a\vee(\tilde a\wedge\tilde b)=\tilde a$$

即知 $\mathscr{F}^*(R)$是一个格.事实上,因为对任何 $\lambda\in(0,1]$

$$\begin{aligned}(\tilde a\wedge(\tilde a\vee\tilde b))_\lambda &= a_\lambda\wedge(a_\lambda\vee b_\lambda)\\ &=[a_\lambda^-,a_\lambda^+]\wedge([a_\lambda^-,a_\lambda^+]\vee[b_\lambda^-,b_\lambda^+])\\ &=[a_\lambda^-,a_\lambda^+]\wedge[a_\lambda^-\vee b_\lambda^-,a_\lambda^+\vee b_\lambda^+]\\ &=[a_\lambda^-\wedge(a_\lambda^-\vee b_\lambda^-),a_\lambda^+\wedge(a_\lambda^+\vee b_\lambda^+)]\\ &=[a_\lambda^-,a_\lambda^+]=a_\lambda.\end{aligned}$$

所以

$$\tilde a\wedge(\tilde a\vee\tilde b)=\tilde a.$$

同理可证

$$\tilde a\vee(\tilde a\wedge\tilde b)=\tilde a.$$

下面我们证明 $\mathscr{F}^*(R)$是稠密的.事实上,设 $\tilde a,\tilde b\in\mathscr{F}^*(R)$,$\tilde a<\tilde b$.则对于任何 $\lambda\in(0,1]$

$$a_\lambda^-\leqslant b_\lambda^- \text{ 和 } a_\lambda^+\leqslant b_\lambda^+.$$

且存在 $\lambda_0\in(0,1]$使得

$$a_{\lambda_0}^-<b_{\lambda_0}^- \quad\text{或}\quad a_{\lambda_0}^+<b_{\lambda_0}^+.$$

所以

$$a_{\lambda_0} < \frac{a_{\lambda_0} + b_{\lambda_0}}{2} < b_{\lambda_0} \text{ 或 } a^+_{\lambda_0} < \frac{a^+_{\lambda_0} + b^+_{\lambda_0}}{2} < b^+_{\lambda_0}.$$

我们定义

$$\tilde{c} = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda\left[\frac{a^-_\lambda + b^-_\lambda}{2}, \frac{a^+_\lambda + b^+_\lambda}{2}\right].$$

则 $\tilde{a} < \tilde{c} < \tilde{b}$.

我们再证明 $\tilde{c} \in \mathscr{F}^*(R)$. 由于 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathscr{F}^*(R)$, 所以 $[a^-_1, a^+_1] \neq \varnothing$, $[b^-_1, b^+_1] \neq \varnothing$. 即 $a^-_1 \leqslant a^+_1$, $b^-_1 \leqslant b^+_1$, 从而

$$\left[\frac{a^-_1 + b^-_1}{2}, \frac{a^+_1 + b^+_1}{2}\right] \neq \varnothing.$$

即 $\tilde{c}$ 是正规的. 又由于当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 时 $[a^-_{\lambda_2}, a^+_{\lambda_2}] \subset [a^-_{\lambda_1}, a^+_{\lambda_1}]$ 和 $[b^-_{\lambda_2}, b^+_{\lambda_2}] \subset [b^-_{\lambda_1}, b^+_{\lambda_1}]$, 所以

$$\left[\frac{a^-_{\lambda_2} + b^-_{\lambda_2}}{2}, \frac{a^+_{\lambda_2} + b^+_{\lambda_2}}{2}\right] \subset \left[\frac{a^-_{\lambda_1} + b^-_{\lambda_1}}{2}, \frac{a^+_{\lambda_1} + b^+_{\lambda_1}}{2}\right].$$

故 $\tilde{c} \in \mathscr{F}^*(R)$.

2.2 模糊数的模糊距离

设

$$\mathscr{F}^*_+(R) = \{\tilde{a}; \tilde{a} \geqslant 0, \tilde{a} \in \mathscr{F}^*(R)\}.$$

定义 2.2.1 映射 $\rho: \mathscr{F}^*(R) \times \mathscr{F}^*(R) \to \mathscr{F}^*_+(R)$ 称为一个模糊距离, 如果 ρ 满足条件

(1) $\rho(\tilde{a}, \tilde{b}) \geqslant 0$, $\rho(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0$ 的充分必要条件是 $\tilde{a} = \tilde{b}$;

(2) 对任意 $\tilde{c} \in \mathscr{F}^*(R)$, 有

$$\rho(\tilde{a}, \tilde{b}) \leqslant \rho(\tilde{a}, \tilde{c}) + \rho(\tilde{c}, \tilde{b}).$$

如果 ρ 是模糊距离, 则称 $(R, \mathscr{F}^*(R), \rho)$ 为一个模糊度量空间或模糊距离空间.

命题 2.2.1 设$(R,\mathscr{F}^*(R),\rho)$是一模糊距离空间，则

(3) $$\rho(\tilde{a},\tilde{b})=\rho(\tilde{b},\tilde{a}).$$

证明 由定义 2.2.1 即得．

定理 2.2.1 下式定义的$\tilde{\rho}$是一个模糊数的模糊距离：对于任何$\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[|a_1^- - b_1^-|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - b_\eta^+|\Big].\ (*)$$

证明

(1) 首先证明$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\in\mathscr{F}_+^*(R)$ $(\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R))$．事实上，因为$\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，所以它们都是正规的．即

$$[a_1^-,a_1^+]\neq\varnothing,[b_1^-,b_1^+]\neq\varnothing.$$

于是

$$|a_1^- - b_1^-|\leqslant|a_1^- - b_1^-| \vee |a_1^+ - b_1^+|,$$

因此

$$\big[|a_1^- - b_1^-|,|a_1^- - b_1^-| \vee |a_1^+ - b_1^+|\big]\neq\varnothing.$$

也就是说$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$是正规的．根据$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$的定义，及对于任何$\lambda_1<\lambda_2$，

$$\Big[|a_1^- - b_1^-|,\sup_{\lambda_2\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - b_\eta^+|\Big]$$
$$\subset\Big[|a_1^- - b_1^-|,\sup_{\lambda_1\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - b_\eta^+|\Big],$$

即知$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\in\mathscr{F}_+^*(R)$.

(2) 我们证明$\tilde{\rho}$是一个模糊数的模糊距离．

(a) 显然$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\geqslant 0$.

如果$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=0$，则对于任何$\lambda\in(0,1]$，

$$\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_\eta^- - b_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - b_\eta^+|=0,$$

从而，

$$a_\lambda^- = b_\lambda^-, a_\lambda^+ = b_\lambda^+.$$

则

$$\tilde{a} = \tilde{b}.$$

反之，如果 $\tilde{a} = \tilde{b}$，则对于任何 $\lambda \in (0,1]$，

$$a_\lambda^- = b_\lambda^-, a_\lambda^+ = b_\lambda^+.$$

于是

$$\sup_{\lambda \leq \eta \leq 1} |a_\eta^- - b_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - b_\eta^+| = 0.$$

故

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0.$$

(2) 因为对于任何 $\tilde{c} \in \mathscr{F}^*(R)$，$\eta \in (0,1]$，

$$|a_\eta^- - b_\eta^-| \leq |a_\eta^- - c_\eta^-| + |c_\eta^- - b_\eta^-|$$

及

$$|a_\eta^+ - b_\eta^+| \leq |a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^+ - b_\eta^+|,$$

则

$$|a_\eta^- - b_\eta^-| \leq |a_\eta^- - c_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^- - b_\eta^-| \vee |c_\eta^+ - b_\eta^+|$$

及

$$|a_\eta^+ - b_\eta^+| \leq |a_\eta^- - c_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^- - b_\eta^-| \vee |c_\eta^+ - b_\eta^+|.$$

因此，对于任何 $\eta \in [\lambda, 1]$，$(\lambda \in (0,1])$，

$$\begin{aligned} & |a_\eta^- - b_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - b_\eta^+| \\ \leq & |a_\eta^- - c_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - c_\eta^+| + |c_\eta^- - b_\eta^-| \vee |c_\eta^+ - b_\eta^+| \\ \leq & \sup_{\lambda \leq \eta \leq 1} |a_\eta^- - c_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - c_\eta^+| \\ & + \sup_{\lambda \leq \eta \leq 1} |c_\eta^- - b_\eta^-| \vee |c_\eta^+ - b_\eta^+|. \end{aligned}$$

从而，对于任意 $\lambda \in (0,1]$，

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \leq \eta \leq 1} |a_\eta^- - b_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - b_\eta^+| \\ \leq & \sup_{\lambda \leq \eta \leq 1} |a_\eta^- - c_\eta^-| \vee |a_\eta^+ - c_\eta^+| \end{aligned}$$

$$+\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}|c_\eta^- - b_\eta^- \vee |c_\eta^+ - b_\eta^+|.$$

于是

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{c})+\tilde{\rho}(\tilde{c},\tilde{b}).$$

容易看到，如果 $a,b\in R$，则

$$\tilde{\rho}(a,b)=|a-b|.$$

命题 2.2.2 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，则 $\tilde{a}\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},0)$.

证明 显然.

命题 2.2.3 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}_+^*(R)$，$\varepsilon\in[0,\infty)$，则 $\tilde{\rho}(\tilde{a},0)\leqslant\varepsilon$ 充分必要条件是 $\tilde{a}\leqslant\varepsilon$.

证明 显然.

定理 2.2.2 设 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\in\mathscr{F}^*(R)$，$a\in R$，则

(1) $\tilde{\rho}(\tilde{a}+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{c})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c})$;

(2) $\tilde{\rho}(\tilde{b}\cdot\tilde{a},\tilde{c}\cdot\tilde{a})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c})$;

(3) $\tilde{\rho}(\tilde{a}-\tilde{b},\tilde{a}-\tilde{c})=\tilde{\rho}(-\tilde{b},-\tilde{c})$;

(4) 如果 $a\geqslant0$，则 $\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=a\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$,

如果 $a<0$，则 $\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=|a|\cdot\tilde{\rho}(-\tilde{a},-\tilde{b})$;

(5) 如果 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}\leqslant\tilde{c}$，则

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{c}),\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{c});$$

(6) 如果 $\tilde{a}\leqslant\tilde{c}\leqslant\tilde{b}$，$\tilde{a}\leqslant\tilde{d}\leqslant\tilde{b}$，则

$$\tilde{\rho}(\tilde{c},\tilde{d})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}).$$

证明 我们仅证明(1)(4)(6)，其余类似可证.

(1)因为，

$$\tilde{a}+\tilde{b}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^-+b_\lambda^-,a_\lambda^++b_\lambda^+]$$

及

$$\tilde{a}+\tilde{c}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^- + c_\lambda^-, a_\lambda^+ + c_\lambda^+],$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{a}+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{c})=&\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[|(a_1^- + b_1^-)-(a_1^- + c_1^-)|,\\&\sup_{\lambda\leq\eta\leq 1}|(a_\eta^- + b_\eta^-)-(a_\eta^- + c_\eta^-)|\\&\vee|(a_\eta^+ + b_\eta^+)-(a_\eta^+ + c_\eta^+)|]\\=&\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[|b_1^- - c_1^-|,\sup_{\lambda\leq\eta\leq 1}|b_\eta^- - c_\eta^-|\\&\vee|b_\eta^+ - c_\eta^+|]\\=&\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c}).\end{aligned}$$

(4) 如果 $a\in[0,+\infty)$，则

$$a\cdot\tilde{a}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a\cdot a_\lambda^-, a\cdot a_\lambda^+];$$

$$a\cdot\tilde{b}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a\cdot b_\lambda^-, a\cdot b_\lambda^+].$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=&\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[|a\cdot a_1^- - a\cdot b_1^-|,\\&\sup_{\lambda\leq\eta\leq 1}|a\cdot a_\eta^- - a\cdot b_\eta^-|\\&\vee|a\cdot a_\eta^+ - a\cdot b_\eta^+|]\\=&a\cdot\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}).\end{aligned}$$

同理可证，如果 $a<0$，

$$\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=|a|\tilde{\rho}(-\tilde{a},-\tilde{b}).$$

(6) 因为 $\tilde{a}\leqslant\tilde{c}\leqslant\tilde{b}$，$\tilde{a}\leqslant\tilde{d}\leqslant\tilde{b}$，所以，对于任意 $\lambda\in(0,1]$ 有

$$|c_\lambda^- - d_\lambda^-|\leqslant|b_\lambda^- - a_\lambda^-|,\quad |c_\lambda^+ - d_\lambda^+|\leqslant|b_\lambda^+ - a_\lambda^+|.$$

于是

$$\tilde{\rho}(\tilde{c},\tilde{d})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}).$$

定理 2.2.3 下式(* *)定义的 ρ^* 是一个模糊数的模糊距

离：对于任何 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$

$$\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\Big[\sup_{0\leqslant\eta\leqslant\lambda}|a_\eta^- -b_\eta^-|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta^+ -b_\eta^+|$$
$$\vee\sup_{0\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta-b_\eta|\Big](**).$$

证明 类似定理 2.2.1 可证.

容易看到，如果 $a,b\in R$，则

$$\rho^*(a,b)=|a-b|.$$

命题 2.2.4 设 $\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，则 $\tilde{a}\leqslant\rho^*(\tilde{a},0)$，如果 $\tilde{a}\in\mathscr{F}_+^*(R)$，则 $\rho^*(\tilde{a},0)=\tilde{a}$.

证明 显然.

定理 2.2.4 设 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\varepsilon\in[0,\infty)$，则 $\bar{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon$ 的充分必要条件是 $\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon$.

证明 设 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\varepsilon\in[0,\infty)$，$\bar{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta^- -b_\eta^-|\vee|a_\eta^+ -b_\eta^+|\leqslant\varepsilon,$$

从而，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$|a_\lambda^- -b_\lambda^-|\leqslant\varepsilon,\quad|a_\lambda^+ -b_\lambda^+|\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$\sup_{0\leqslant\eta\leqslant\lambda}|a_\eta^- -b_\eta^-|\leqslant\varepsilon\text{ 且 }\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta^- -b_\eta^-|\vee\sup_{0\leqslant\eta\leqslant1}|a_\eta^- -b_\eta^-|\leqslant\varepsilon.$$

即

$$\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon.$$

反之，我们同样可以证明，如果 $\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon$ 则 $\bar{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\varepsilon$.

定理 2.2.5 设 $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\in\mathscr{F}^*(R)$，$a\in R$，则

(1) $\rho^*(\tilde{a}+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{c})=\rho^*(\tilde{b},\tilde{c})$;

(2) $\rho^*(\tilde{b}-\tilde{a},\tilde{c}-\tilde{a})=\rho^*(\tilde{b},\tilde{c})$;

(3) $\rho^*(\tilde{a}-\tilde{b},\tilde{a}-\tilde{c})=\rho^*(-\tilde{b},-\tilde{c})$;

(4) $\rho^*(a\cdot\tilde{a},a\cdot\tilde{b})=\begin{cases}a\rho^*(\tilde{a},\tilde{b}), & 当\ a\geqslant 0,\\ |a|\rho^*(\tilde{a},\tilde{b}), & 当\ a<0.\end{cases}$

(5) 如果 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}\leqslant\tilde{c}$，则 $\rho^*(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\rho^*(\tilde{a},\tilde{c})$，$\rho^*(\tilde{b},\tilde{c})\leqslant\rho^*(\tilde{a},\tilde{c})$；

(6) 如果 $\tilde{a}\leqslant\tilde{c}\leqslant\tilde{b}$，$\tilde{a}\leqslant\tilde{d}\leqslant\tilde{b}$，则

$$\rho^*(\tilde{c},\tilde{d})\leqslant\rho^*(\tilde{a},\tilde{b}).$$

证明 类似定理 2.2.2 可以证明.

2.3 模糊数的模糊极限定义及运算

定义 2.3.1 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，成立

$$\rho(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon,$$

则称$\{\tilde{a}_n\}$依模糊距离 ρ 收敛于 $\tilde{a}$，记为

$$(\rho)\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}\quad 或\quad \tilde{a}_n\xrightarrow{(\rho)}\tilde{a}(n\to\infty).$$

定理 2.3.1 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\rho$和 ρ^* 分别由(*)和(* *)定义的模糊距离，则$(\rho)\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$ 的充分必要条件是$(\rho^*)\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$.

证明 由定理 2.2.4 和定义 2.3.1 立知.

在以后的各章节的讨论中，我们总是使用(*)定义的模糊距离.

定理 2.3.2 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，则$\{\tilde{a}_n\}$依$\rho$收敛于 $\tilde{a}$ 的充要条件是对于任意 $\lambda\in(0,1]$，$\{a_{n_\lambda}^-\}$，$\{a_{n_\lambda}^+\}$一致收敛于 a_λ^-，a_λ^+.

证明 因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$,所以,对于任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $N>0(N\in R)$,当 $n\in R,n\geqslant N$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\varepsilon.$$

于是,对于任意 $\lambda\in(0,1]$

$$|a_{n_\lambda}^- - a_\lambda^-|\leqslant\varepsilon,\quad |a_{n_\lambda}^+ - a_\lambda^+|\leqslant\varepsilon.$$

从而$\{a_{n_\lambda}^-\}$,$\{a_{n_\lambda}^+\}$关于 $\lambda\in(0,1]$ 一致收敛于 a_λ^-,a_λ^+.

反之,由于$\{a_{n_\lambda}^-\}$和$\{a_{n_\lambda}^+\}$关于 $\lambda\in(0,1]$ 一致收敛于 a_λ^- 和 a_λ^+,所以,对于任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n\geqslant N$ 时$(n,N\in R)$,对于 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$|a_{n_\lambda}^- - a_\lambda^-|<\varepsilon,\qquad |a_{n_\lambda}^+ - a_\lambda^+|<\varepsilon.$$

于是

$$|a_{n_1}^- - a_1^-|<\varepsilon,\qquad \sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_{n_\eta}^- - a_\eta^-|\vee|a_{n_\eta}^+ - a_\eta^+|\leqslant\varepsilon.$$

故

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[|a_{n_1}^- - a_1^-|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}|a_{n_\eta}^- - a_\eta^-|$$
$$\vee|a_{n_\eta}^+ - a_\eta^+|\Big]\leqslant\varepsilon.$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}.$$

定理 2.3.3 设$\{\tilde{a}_n\}$,$\{\tilde{b}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$,$\tilde{a}$,$\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$,$a\in R$,如果

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a},\qquad (\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b},$$

则 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{a}_n+\tilde{b})=\tilde{a}+\tilde{b}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{a}_n-\tilde{b}_n)=\tilde{a}-\tilde{b}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a\cdot\tilde{a}_n)=a\cdot\tilde{a}$.

证明

(1) 因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$，所以，对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，成立

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\varepsilon/2,\quad \tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})\leqslant\varepsilon/2.$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n,\tilde{a}+\tilde{b})&\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n,\tilde{a}_n+\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{b})\\&=\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n)=\tilde{a}+\tilde{b}.$$

(2) 同理可证．

(3) 当 $a\geqslant0$ 时．因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，所以对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时成立

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\frac{\varepsilon}{a+1}.$$

于是

$$\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a}_n,a\cdot\tilde{a})=a\cdot\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant a\cdot\frac{\varepsilon}{a+1}<\varepsilon.$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(a\cdot\tilde{a}_n)=a\cdot\tilde{a}.$$

(4) 当 $a<0$．因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，所以由定理 2.3.2 $\{a_{n_\lambda}^-\}$和$\{a_{n_\lambda}^+\}$关于 $\lambda\in(0,1]$一致收敛于 a_λ^- 和 a_λ^+．于是$\{-a_{n_\lambda}^-\}$和$\{-a_{n_\lambda}^+\}$关于 $\lambda\in(0,1]$一致收敛于$-a_\lambda^-$ 和$-a_\lambda^+$．从而$\{-\tilde{a}_n\}$依$\tilde{\rho}$收敛于$-\tilde{a}$．即，对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时成立

$$\tilde{\rho}(-\tilde{a}_n,-\tilde{a})\leqslant\frac{\varepsilon}{|a|}.$$

使用定理 2.2.2,我们得到

$$\tilde{\rho}(a\cdot\tilde{a}_n,a\cdot\tilde{a})=|a|\tilde{\rho}(-\tilde{a}_n,-\tilde{a})$$
$$\leqslant|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon.$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}.$$

定理 2.3.4 (极限唯一性定理)设 $\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$,$\tilde{a}$,$\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$,如果

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a},(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{b},$$

则

$$\tilde{a}=\tilde{b}.$$

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{b}$,所以,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,一定存在正整数 N_1 和 N_2,使得当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

及当 $n\geqslant N_2$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n\geqslant N$ 时

$$0\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{a}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b})$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=0,$$

即

$$\tilde{a}=\tilde{b}.$$

定理 2.3.5 （夹挤定理）设$\{\tilde{a}_n\}$，$\{\tilde{b}_n\}$，$\{\tilde{c}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，如果对于任何$n$，有$\tilde{a}_n\leqslant\tilde{b}_n\leqslant\tilde{c}_n$及

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{c}_n=\tilde{a},$$

则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{a}.$$

证明 因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$及$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{c}_n=\tilde{a}$，所以，对于任意给定的$\varepsilon>0$，我们总能找到正整数$N_1$和$N_2$，使得，当$n\geqslant N_1$时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

及当$n\geqslant N_2$时

$$\tilde{\rho}(\tilde{c}_n,\tilde{a})\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为对于任何n

$$\tilde{a}_n\leqslant\tilde{b}_n\leqslant\tilde{c}_n,$$

则当$n\geqslant\max\{N_1,N_2\}$时，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{a}_n)&\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{c}_n)\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})+\tilde{\rho}(\tilde{c}_n,\tilde{a})\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{a})&\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{a}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\\&\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{a}.$$

定理 2.3.6 （有界性定理）设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}$

$\neq\widetilde{\infty},\tilde{a}_n\neq\widetilde{\infty},n=1,2,\cdots$,如果$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$,则一定存在 $\tilde{m},\widetilde{M}\in\mathscr{F}^*(R)$,使得对于任何 n 有

$$\widetilde{\infty}\neq\tilde{m}\leqslant\tilde{a}_n\leqslant\widetilde{M}\neq\widetilde{\infty}.$$

证明 取 $\varepsilon=1$,因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$,所以,我们总可以找到正整数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant 1.$$

于是,对于任何 $\lambda\in(0,1]$有

$$|a_{n_\lambda}^- - a_\lambda^-|\leqslant 1,|a_{n_\lambda}^+ - a_\lambda^+|\leqslant 1,$$

从而

$$a_\lambda^- - 1\leqslant a_{n_\lambda}^-\leqslant a_\lambda^- + 1,a_\lambda^+ - 1\leqslant a_{n_\lambda}^+\leqslant a_\lambda^+ + 1.$$

因此

$$\begin{aligned}\tilde{a}-1&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^-,a_\lambda^+]-1=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^- - 1,a_\lambda^+ - 1]\\&\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_{n_\lambda}^-,a_{n_\lambda}^+]=\tilde{a}_n.\end{aligned}$$

同理

$$\tilde{a}_n\leqslant\tilde{a}+1.$$

我们设

$$\widetilde{M}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\max_{\tilde{x}\in\{\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_N,\tilde{a}+1\}}x_\lambda^-,\max_{\tilde{x}\in\{\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_N,\tilde{a}+1\}}x_\lambda^+\Big],$$

$$\tilde{m}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\min_{\tilde{x}\in\{\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_N,\tilde{a}-1\}}x_\lambda^-,\min_{\tilde{x}\in\{\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_N,\tilde{a}-1\}}x_\lambda^+\Big].$$

可以证明 $\widetilde{M},\tilde{m}\in\mathscr{F}^*(R)$,且对于任何 n,

$$\tilde{m}\leqslant\tilde{a}_n\leqslant\widetilde{M}.$$

定理 2.3.7 设$\{\tilde{a}_n\},\{\tilde{b}_n\}\subset\mathscr{F}_+^*(R)$,$\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}_+^*(R)$,$\tilde{a}\neq\widetilde{\infty}$,$\tilde{b}\neq\widetilde{\infty},\tilde{a}_n\neq\widetilde{\infty},\tilde{b}_n\neq\widetilde{\infty},n=1,2,\cdots$,如果$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$,$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$,则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b}_n)=\tilde{a}\cdot\tilde{b}.$$

证明 因为$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，所以由定理 2.3.6 存在 $\tilde{M}\in\mathscr{F}_+^*(R)\tilde{M}\neq\widetilde{\infty}$使得对于任何 n，

$$\tilde{a}_n\leqslant\tilde{M}.$$

又由于 $\tilde{M}\neq\widetilde{\infty}$，$\tilde{b}\neq\widetilde{\infty}$，所以存在 $M\in R$ 使得

$$\tilde{M}\leqslant M\text{ 及 }\tilde{b}\leqslant M.$$

又由于$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$，所以，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_1 和 N_2，使得当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})<\frac{\varepsilon}{2M}$$

及当 $n\geqslant N_2$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n\tilde{b}_n,\tilde{a}\cdot\tilde{b})&\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b}_n,\tilde{a}_n\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b},\tilde{a}\cdot\tilde{b})\\&=\tilde{a}_n\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})+\tilde{b}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\\&\leqslant\tilde{M}\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b})+\tilde{b}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\\&\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\tilde{a}_n\cdot\tilde{b}_n)=\tilde{a}\cdot\tilde{b}.$$

推论 2.3.1 设$\{\alpha_n\}\subset R$，$\alpha\in R$，$\alpha\geqslant0$，$\alpha_n\geqslant0$，$n=1,2,\cdots$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}_+^*(R)$ $\tilde{a}\neq\widetilde{\infty}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\cdot\tilde{a})=\alpha\cdot\tilde{a}$$

证明 显然.

定理 2.3.8 （保号性定理）设$\{\tilde{a}_n\},\{\tilde{b}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$，如果对于任何 n，

$$\tilde{a}_n\leqslant\tilde{b}_n\quad(\text{分别地},\tilde{b}_n\leqslant\tilde{a}_n).$$

则

$$\tilde{a}\leqslant\tilde{b}\quad(\text{分别地},\tilde{b}\leqslant\tilde{a}).$$

证明 使用定理 2.3.2 即可得证.

注意：此定理的逆定理是不成立的.

定理 2.3.9 （模糊距离的连续性定理）设$\{\tilde{a}_n\}\{\tilde{b}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，如果$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{b}_n=\tilde{b}$，则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)=\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}).$$

证明 由于

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})+\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})+\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{b}_n)$$

及

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{a}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{b}_n,\tilde{b}),$$

所以，使用定理 2.3.8，我们立知结论成立.

2.4 模糊数的模糊极限性质

设 A^* 是 $\mathscr{F}^*(R)$的一个子集类，A^* 有以下性质：

(1) 对于任何 $A\in A^*$，如果 $B=\{\inf A_0;A_0\subset A\}$ 有上界，则 $\sup B\in\mathscr{F}^*(R)$，

(2) 对于任何 $A\in A^*$，如果 $C=\{\sup A_0;A_0\subset A\}$ 有下界，则 $\inf C\in\mathscr{F}^*(R)$.

显然，A^* 是非空的集类。

定义 2.4.1 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$,如果对于任何 n

$$\tilde{a}_n \leqslant \tilde{a}_{n+1},$$

则称$\{\tilde{a}_n\}$是单调增加的模糊数序列. 如果对于任何 n,

$$\tilde{a}_{n+1} \leqslant \tilde{a}_n,$$

则称$\{\tilde{a}_n\}$是单调减少的模糊数序列.

定理 2.4.1 (单调收敛定理)设$\{\tilde{a}_n\}\in A^*$,

(1) 如果$\{\tilde{a}_n\}$是单调增加的模糊序列,且$\{\tilde{a}_n\}$存在一个上界 $\tilde{M}(\tilde{M}\neq\widetilde{\infty})\in\mathscr{F}^*(R)$,则$\{\tilde{a}_n\}$是收敛的,且

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n = \sup_{n\geq 1}\{\tilde{a}_n\}.$$

(2) 如果$\{\tilde{a}_n\}$是单调减少的模糊数序列,且$\{\tilde{a}_n\}$存在一个下界 $\tilde{m}(\tilde{m}\neq-\widetilde{\infty})\in\mathscr{F}^*(R)$,则$\{\tilde{a}_n\}$是收敛的,且

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n = \inf_{n\geq 1}\{\tilde{a}_n\}.$$

证明 仅证明(1),(2)类似可证. 事实上,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,由$\{\tilde{a}_n\}\in A^*$及上确界定义,存在正整数 N,使得

$$\sup\{\tilde{a}_n\} < \tilde{a}_N + \varepsilon.$$

因为$\{\tilde{a}_n\}$是模糊数的单调增加序列,所以对于 $n\geqslant N$ 时,我们总有

$$\tilde{a}_n \leqslant \sup_{n\geq 1}\{\tilde{a}_n\} \leqslant \tilde{a}_N + \varepsilon \leqslant \tilde{a}_n + \varepsilon.$$

于是

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\sup_{n\geq 1}\{\tilde{a}_n\}) \leqslant \tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a}_n+\tilde{\varepsilon}) = \tilde{\rho}(\varepsilon,0) = \varepsilon.$$

也就是说

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n = \sup_{n\geq 1}\{\tilde{a}_n\}.$$

定义 2.4.2 设$\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$,$\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$,我们定义

$$[\tilde{a},\tilde{b}] \triangleq \{\tilde{x};\tilde{a}\leqslant\tilde{x}\leqslant\tilde{b},\tilde{x}\in\mathscr{F}^*(R)\},$$

称$[\tilde{a},\tilde{b}]$为一个模糊数的闭区间.

定理 2.4.2 （闭区间套定理）设$\{[\widetilde{a},\widetilde{b}]\}$是 A^* 的一个闭区间序列，如果它有性质：

(1) $\widetilde{a}_n \leqslant \widetilde{a}_{n+1} \leqslant \widetilde{b}_{n+1} \leqslant \widetilde{b}_n, n=1,2,\cdots, \widetilde{a}_1 \neq \widetilde{\infty}, \widetilde{b}_1 \neq \widetilde{\infty}$;

(2) $\widetilde{\rho}(\widetilde{a}_n,\widetilde{b}_n) \xrightarrow{\widetilde{\rho}} 0 (n \to \infty)$,

则

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{b}_n \triangleq \widetilde{a} \in \mathscr{F}^*(R).$$

且 $\widetilde{a}$ 是这些闭区间的唯一公共点。

证明 由定理的条件，我们知道

$$\widetilde{a}_1 \leqslant \widetilde{a}_2 \leqslant \cdots \leqslant \widetilde{a}_n \leqslant \cdots \leqslant \widetilde{b}_1;$$

$$\widetilde{a}_1 \leqslant \cdots \leqslant \widetilde{b}_n \leqslant \cdots \leqslant \widetilde{b}_2 \leqslant \widetilde{b}_1.$$

因此$\{\widetilde{a}_n\}$是有上界$\widetilde{b}_1$的单调增加的模糊数序列，$\{\widetilde{b}_n\}$是有下界$\widetilde{a}_1$的单调减少的模糊数序列．我们使用定理 2.4.1，得到

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = \sup_{n\geqslant 1}\{\widetilde{a}_n\};$$

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{b}_n = \inf_{n\geqslant 1}\{\widetilde{b}_n\}.$$

于是，对于任何正整数 k，

$$\widetilde{a}_k = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n, (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{b}_n \leqslant \widetilde{b}_k.$$

再使用定理 2.3.8，我们有

$$\widetilde{a}_k \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n \leqslant \widetilde{b}_k, \widetilde{a}_k \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{b}_n \leqslant \widetilde{b}_k, k = 1,2,\cdots.$$

因此，对于任何正整数 k，

$$\widetilde{\rho}\left((\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n, (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{b}_n\right) \leqslant \widetilde{\rho}(\widetilde{a}_k,\widetilde{b}_k).$$

再使用定理 2.3.9，得到

$$0 \leqslant \widetilde{\rho}\left((\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n, (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{b}_n\right) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{\rho}(\widetilde{a}_k,\widetilde{b}_k) = 0$$

从而

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n\triangleq\tilde{a}.$$

因为 $\tilde{a}=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{\tilde{a}_n\}=\inf\limits_{n\geqslant 1}\{\tilde{b}_n\}$，所以

$$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)\text{ 且 }\tilde{a}\in[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]\quad n=1,2,\cdots.$$

假设还存在 $\tilde{a}'\in\mathscr{F}^*(R)$，且 $\tilde{a}'\in[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]$，$n=1,2,\cdots$. 即

$$\tilde{a}_n\leqslant\tilde{a}\leqslant\tilde{b}_n,\tilde{a}_n\leqslant\tilde{a}'\leqslant\tilde{b}_n,n=1,2,\cdots$$

于是，对于任何正整数 n，

$$0\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{a}')\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n).$$

从而

$$0\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{a}')\leqslant(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)=0.$$

即

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{a}')=0$$

也就是说

$$\tilde{a}=\tilde{a}'.$$

定义 2.4.3 设 $\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，且 $\{\tilde{a}_n\}$ 是有界的，我们定义

$$(\tilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}\{\tilde{a}_n\};$$

$$(\tilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k}\{\tilde{a}_n\},$$

分别称 $(\tilde{\rho})\varlimsup\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n$ 和 $(\tilde{\rho})\varliminf\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n$ 为 $\{\tilde{a}_n\}$ 的上极限和下极限 .

定理 2.4.3 设 $\{\tilde{a}_n\}\in A^*$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，则 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$ 的充分必要条件是 $(\tilde{\rho})\varlimsup\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\varliminf\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$.

证明 设 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$. 则对于任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$\tilde{a} - \varepsilon \leqslant \tilde{a}_n \leqslant \tilde{a} + \varepsilon.$$

从而，对于任何正整数 $k \geqslant N$，

$$\tilde{a} - \varepsilon \leqslant \tilde{a}_n \leqslant \sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\} \leqslant \tilde{a} + \varepsilon.$$

因为$\{\sup\limits_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}\}$关于 k 是单调减少且有下界 $\tilde{a}-\varepsilon$ 的模糊数序列，所以

$$\tilde{a} - \varepsilon \leqslant (\tilde{\rho})\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = (\tilde{\rho})\lim_{k \to \infty}\sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\} \leqslant \tilde{a} + \varepsilon.$$

而 $\varepsilon > 0$ 是任意的，这证明了

$$(\tilde{\rho})\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = \tilde{a}.$$

同理可证

$$(\tilde{\rho})\ \underline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = \tilde{a}.$$

即

$$(\tilde{\rho})\ \overline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = (\tilde{\rho})\ \underline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = \tilde{a}.$$

反之，设$(\tilde{\rho})\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = (\tilde{\rho})\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = \tilde{a}$. 则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，我们总能找到两个正整数 k_1, k_2 使得当 $k \geqslant k_1$ 时

$$\tilde{\rho}\left(\sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}, \tilde{a}\right) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

及当 $k \geqslant k_2$ 时

$$\tilde{\rho}\left(\inf_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}, \tilde{a}\right) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

取 $K = \max(k_1, k_2)$，当 $k \geqslant K$ 时，我们有

$$\tilde{\rho}\left(\inf_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}, \sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}\right) \leqslant \varepsilon.$$

又因为对于任何的正整数 k

$$\inf_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\} \leqslant \tilde{a}_k \leqslant \sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}.$$

所以，当 $k \geqslant K$ 时

$$\tilde{\rho}\left(\tilde{a}_k, \inf_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}\right) \leqslant \varepsilon.$$

结果，当 $k \geqslant K$ 时，

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_k, \tilde{a}) \leqslant \tilde{\rho}(\tilde{a}_k, \inf_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}) + \tilde{\rho}(\inf_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}, \tilde{a})$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{3}{2}\varepsilon.$$

也就是说

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \tilde{a}_n = \tilde{a}.$$

命题 2.4.1 设 $\{\tilde{a}_n\} \subset \mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a} \in \mathscr{F}^*(R)$. 如果 $(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = \tilde{a}$（分别地，$(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = \tilde{a}$），则存在 $\{\tilde{a}_n\}$ 的一个子序列 $\{\tilde{a}_{n_k}\}$ 使得

$$(\tilde{\rho}) \lim_{k \to \infty} \tilde{a}_{n_k} = \tilde{a}.$$

证明 因为 $(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n \to \infty}}\tilde{a}_n = \tilde{a}$，所以，对于任意给定 $\varepsilon > 0$ 存在 $K > 0$，与 $k > K$ 时，由

$$(\tilde{\rho}) \overline{\lim_{n \to \infty}} \tilde{a}_n = (\tilde{\rho}) \lim_{k \to \infty} \sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}$$

知，

$$\tilde{\rho}(\sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}, \tilde{a}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再由 $\sup\limits_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}$ 的定义，存在 $n_k \geqslant k$ 使得

$$\tilde{\rho}(\sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}, \tilde{a}_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}, k = 1, 2, \cdots.$$

从而我们得到 $\{\tilde{a}_n\}$ 的一个子序列 $\{\tilde{a}_{n_k}\}$，且有当 $k > K$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_{n_k}, \tilde{a}) \leqslant \tilde{\rho}(\tilde{a}_{n_k}, \sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}) + \tilde{\rho}(\sup_{n \geqslant k}\{\tilde{a}_n\}, \tilde{a})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即

$$(\tilde{\rho}) \lim_{k \to \infty} \tilde{a}_{n_k} = \tilde{a}.$$

定义 2.4.4 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，则$\{\tilde{a}_n\}$称为基本模糊数序列，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 N，使得当 $n,m\geqslant N$ 时，成立

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_m,\tilde{a}_n)\leqslant\varepsilon.$$

定理 2.4.4 (Cauchy 收敛原理)设$\{\tilde{a}_n\}\in A^*$，则$\{\tilde{a}_n\}$是收敛的充分必要条件是$\{\tilde{a}_n\}$是基本模糊数序列.

证明 必要性是显然的. 我们只需证明充分性. 事实上，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，令 $m=N+1$，则当 $n\geqslant N$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a}_{N+1})\leqslant\varepsilon.$$

因此，当 $n\geqslant N$ 时

$$\tilde{a}_{N-1}-\varepsilon\leqslant\tilde{a}_n\leqslant\tilde{a}_{N+1}+\varepsilon.$$

于是

$$\tilde{a}_{N+1}-\varepsilon\leqslant\inf_{k\geqslant n}\{\tilde{a}_k\}\leqslant\sup_{k\geqslant n}\{\tilde{a}_k\}\leqslant\tilde{a}_{N+1}+\varepsilon.$$

从而

$$\tilde{a}_{N-1}-\varepsilon\leqslant(\tilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\tilde{a}_n\leqslant(\tilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\tilde{a}_n\leqslant\tilde{a}_{N+1}+\varepsilon.$$

故

$$\tilde{\rho}((\tilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\tilde{a}_n,(\tilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\tilde{a}_n)\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{a}_{N+1}-\varepsilon,\tilde{a}_{N+1}+\varepsilon)\leqslant 2\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性，我们得到

$$(\tilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\tilde{a}_n=(\tilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R).$$

根据定理 2.4.3，

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}.$$

定义 2.4.5 设 $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}<\tilde{b}$，我们定义

$$(\tilde{a},\tilde{b})=\{\tilde{x};\tilde{a}<\tilde{x}<\tilde{b},\tilde{x}\in\mathscr{F}^*(R)\},$$

称$(\tilde{a},\tilde{b})$为一个模糊数的开区间.

定义 2.4.6 设 $A\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\mathscr{L}$ 是模糊数的开区间构成的一

个非空类．我们说 $\mathscr{S}$ 覆盖了 A，如果对于任何 $\tilde{a}\in A$，存在至少一个开区间 $\tilde{O}\in\mathscr{S}$ 使得 $\tilde{a}\in\tilde{O}$.

定义 2.4.7 设 $A\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$(\tilde{a}-\varepsilon,\tilde{a}+\varepsilon)$ 含有无穷多个属于 A 的模糊数，则称 $\tilde{a}$ 为 A 的聚点．

定理 2.4.5 $\tilde{a}$ 是 A 的聚点的充分必要条件是 A 中有一串互不相同的模糊数 $\tilde{a}_n$，使得 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$.

证明 先证必要性．设 $\tilde{a}$ 为 A 的聚点．由聚点的定义，在 $(\tilde{a}-1,\tilde{a}+1)$ 中有无穷多个属于 A 的模糊数．我们在其中取一个不等于 $\tilde{a}$ 的模糊数，记为 $\tilde{a}_1$. 考虑开区间 $\left(\tilde{a}-\frac{1}{2},\tilde{a}+\frac{1}{2}\right)$，因为这个区间中也包含无穷多个属于 A 的模糊数，所以可以取其中一个不等于 $\tilde{a}$ 又不等于 $\tilde{a}_1$ 的模糊数，记为 $\tilde{a}_2$，一般地，如果互不相同、不等于 $\tilde{a}$ 又属于 A 的模糊数 $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n$ 已经选出，则考虑开区间 $\left(\tilde{a}-\frac{1}{n+1},\tilde{a}+\frac{1}{n+1}\right)$ 中的属于 A 的模糊数还是有无穷多个，所以可取一个不同于 $\tilde{a},\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_n$ 的模糊数，记为 $\tilde{a}_{n+1}$. 这样一来，我们就得到了一个属于 A 的互不相同的模糊数组成的序列 $\{\tilde{a}_n\}$，且

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\tilde{\rho}\left(\tilde{a}-\frac{1}{n},\tilde{a}+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{2}{n}.$$

因此

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}.$$

再证充分性．设 $\{\tilde{a}_n\}$ 是属于 A 的互不相同的模糊数所构成的序列，且 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}$. 则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{a})\leqslant\varepsilon$. 从而

$$\tilde{a}-2\varepsilon<\tilde{a}_n<\tilde{a}+2\varepsilon.$$

即 $\tilde{a}_n$ 属于开区间 $(\tilde{a}-2\varepsilon,\tilde{a}+2\varepsilon)$. 注意下标 $n\geqslant N$ 的模糊数 $\tilde{a}_n$ 是

无穷多的，所以，$(\tilde{a}-2\varepsilon,\tilde{a}+2\varepsilon)$中确实包含 A 中无穷多个模糊数．因为 $\varepsilon>0$ 的任意性，所以 $\tilde{a}$ 是 A 的聚点．

定义 2.4.8 设 $A\subset\mathscr{F}^*(R)$，$\tilde{a},\tilde{b}\in A$ 及 $\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$，$A$ 称为 M 闭区间，记为$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$，如果对于任何$\tilde{c},\tilde{d}\in A$ 有以下性质：

1) $\tilde{a}\leqslant\tilde{c}\leqslant\tilde{d}\leqslant\tilde{b}$；

2) $\dfrac{\tilde{c}+\tilde{d}}{2}\in A$.

定理 2.4.6 （有限覆盖定理）设$[\tilde{a},\tilde{b}]^*\subset\mathscr{F}^*(R)$，如果对于任何$A\subset[\tilde{a},\tilde{b}]^*$，有 $A\in\mathscr{A}^*$，$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$是有界集，且能够一族开区间 $\mathscr{S}$ 覆盖，则一定存在有限多个开区间 $\tilde{O}_i\in\mathscr{S}$，$i=1,2,\cdots,n$，使得$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$能够被$\mathscr{S}'=\{\tilde{O}_i;i=1,2,\cdots,n\}$所覆盖．

证明 假设$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$不能被 $\mathscr{S}$ 中有限多个开区间所覆盖，则至少存在一个 M-闭区间$\left[\tilde{a},\dfrac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}\right]^*$或$\left[\dfrac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2},\tilde{b}\right]^*$不能被 $\mathscr{S}$ 中的有限多个开区间所覆盖．不失一般性，假设$\left[\tilde{a},\dfrac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}\right]^*$不能被 $\mathscr{S}$ 中的有限多个开区间所覆盖．我们有

$$\tilde{\rho}\left(\tilde{a},\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}\right)=\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}).$$

令 $\tilde{a}_1=\tilde{a}$，$\tilde{b}_1=\dfrac{\tilde{a}-\tilde{b}}{2}$，所以至少存在$\left[\tilde{a}_1,\dfrac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2}\right]^*$或$\left[\dfrac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2},\tilde{b}\right]^*$不能被 $\mathscr{S}$ 中的有限多个开区间所覆盖．不妨设$\left[\tilde{a}_1,\dfrac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2}\right]^*$不能被 $\mathscr{S}$ 中的有限多个开区间所覆盖．令 $\tilde{a}_2=\tilde{a}_1$，$\tilde{b}_2=\dfrac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2}$．我们有

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_2,\tilde{b}_2)=\tilde{\rho}\left(\tilde{a}_1,\frac{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1}{2}\right)=\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\tilde{a}_1,\tilde{b}_1)=\frac{1}{2^2}\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}).$$

我们一直进行下去，得到$\{[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]^*\}$且

(1) $\tilde{a}\leqslant\tilde{a}_1\leqslant\tilde{a}_2\leqslant\cdots\leqslant\tilde{a}_n\leqslant\cdots\leqslant\tilde{b}_n\leqslant\cdots\leqslant\tilde{b}_2\leqslant\tilde{b}_1\leqslant\tilde{b}$；

(2) $\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)=\frac{1}{2^n}\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})$，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)=0$.

因此，我们由定理 2.4.2 存在唯一的一个模糊数$\tilde{c}\in[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]^*$，$n=1,2,\cdots$. 按照$[\tilde{a}_n,\tilde{b}_n]^*$的定义，$\tilde{c}$ 不能被 $\mathscr{S}$ 中有限多个开区间所覆盖．另一方面，因为$\tilde{c}\in[\tilde{a},\tilde{b}]^*$，$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$又能被 $\mathscr{S}$ 所覆盖．所以存在 $\tilde{O}\in\mathscr{S}$ 使得$\tilde{c}\in\tilde{O}$，产生矛盾．从而说明$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$能被 $\mathscr{S}$ 中有限多个开区间所覆盖．

定理 2.4.7 （聚点原理）设 $A\subset[\tilde{a},\tilde{b}]^*$ 且$[\tilde{a},\tilde{b}]^*$满足定理 2.4.6 的条件．如果 A 是一个无穷集合，则 A 至少有一聚点．

证明 显然．

推论 2.4.1 如果$\{\tilde{a}_n\}\subset[\tilde{a},\tilde{b}]^*$且$[\tilde{a}^*,\tilde{b}]^*$满足定理 2.4.6 的条件，则存在一个$\{\tilde{a}_n\}$的子序列$\{\tilde{a}_{n_k}\}$，使得$\{\tilde{a}_{n_k}\}$是收敛的．

证明 显然．

推论 2.4.2 设$\{\tilde{a}_n\}$满足推论 2.4.1 的条件，如果$\{\tilde{a}_n\}$是由互不相同的模糊数组成的，则$\{\tilde{a}_n\}$收敛的充分必要条件是$\{\tilde{a}_n\}$只有一个聚点．

证明 由定理 2.3.4、定理 2.4.5 和定理 2.4.7 推出．

定义 2.4.9 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^+(R)$，并用 $\tilde{S}_n$ 表示其中前 n 项之和：

$$\tilde{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i=\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\cdots+\tilde{a}_n,$$

如果$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_n$存在并等于$\tilde{S}\in\mathscr{F}^+(R)$，则称模糊级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\cdots+\tilde{a}_n+\cdots$$

是收敛的，而 $\tilde{S}$ 称做模糊级数的和；如果模糊极限 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_n$ 不存在，则称这模糊级数是发散的．$\tilde{S}_n$ 称为模糊级数的第 n 次部分和．

命题 2.4.2 模糊级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 收敛的必要条件是 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n=0$.

证明 用 $\tilde{S}_n$ 表示 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 的部分和．如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 是收敛的，即 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_n$ 存在，用 $\tilde{S}$ 表示．则因为

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\tilde{S}_n,\tilde{S}_{n-1}) &= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[|S^-_{n_1}-S^-_{n-1_1}|,\ \sup_{\lambda\le\eta\le1}|S^-_{n_\eta}-S^-_{n-1_\eta}| \\
&\qquad \vee\ |S^+_{n_\eta}-S^+_{n-1_\eta}|\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\Big|\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i_1}\Big|,\ \sup_{\lambda\le\eta\le1}\Big|\sum_{i=1}^{n}a_{i_\eta}-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i_\eta} \\
&\qquad \vee\ \Big|\sum_{i=1}^{n}a^+_{i_\eta}-\sum_{i=1}^{n-1}a^+_{i_\eta}\Big|\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[|a_{n_1}|,\ \sup_{\lambda\le\eta\le1}|a_{n_\eta}|\ \vee\ |a^+_{n_\eta}|\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[|a_{n_1}-0|,\ \sup_{\lambda\le\eta\le1}|a_{n_\eta}-0|\ \vee\ |a^+_{n_\eta}-0|\Big] \\
&= \tilde{\rho}(\tilde{a}_n,0).
\end{aligned}
$$

所以，由定理 2.3.9

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,0) &= (\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{S}_n,\tilde{S}_{n-1}) \\
&= \tilde{\rho}(\tilde{S},\tilde{S}) = 0.
\end{aligned}
$$

又由于

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,0)=\tilde{\rho}(\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,0),0).$$

因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,0)=\tilde{\rho}(\tilde{\rho}(\tilde{a}_n,0),0)\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{a}_n=0.$$

定理 2.4.8 （关于模糊级数的 Cauchy 收敛原理）设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，对于任何 $k>0$，$\left\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i\right\}\in A^*$ 则模糊级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 收敛的充分必要条件是对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，不论 P 是任何正整数，不等式

$$\tilde{\rho}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}\tilde{a}_k,0\right)\leqslant\varepsilon.$$

总成立．

证明 此定理就是 Cauchy 收敛原理的变形．因为只要令 $m=n+p$，就有

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\tilde{S}_m,\tilde{S}_n)=&\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\Big|\sum_{i=1}^{m}a_{i_1}^{-}-\sum_{i=1}^{n}a_{i_1}^{-}\Big|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}\Big|\sum_{i=1}^{m}a_{i_\eta}^{-}-\sum_{i=1}^{n}a_{i_\eta}^{-}\Big|\\&\vee\Big|\sum_{i=1}^{m}a_{i_\eta}^{-}-\sum_{i=1}^{n}a_{i_\eta}^{+}\Big|\Big]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_{k_1}^{-}\Big|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_{k_\eta}\Big|\vee\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_{k_\eta}^{+}\Big|\Big]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_{k_1}^{-}-0\Big|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_{k_\eta}^{-}-0\Big|\\&\vee\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_{k_\eta}^{+}-0\Big|\Big]\\&=\tilde{\rho}\left(\sum_{k=n+1}^{n-p}a_k,0\right).\end{aligned}$$

注意到模糊级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 收敛就是$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_n$ 存在，即知此定理成立．

命题 2.4.3 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*(R)$，如果模糊级数$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$是收敛的，任意把这模糊级数分成若干段，每段只有有限项：

$$\tilde{a}_1+\cdots+\tilde{a}_{n_1},\tilde{a}_{n_1+1}+\cdots+\tilde{a}_{n_2},\cdots,\tilde{a}_{n_{k-1}+1}+\cdots+\tilde{a}_{n_k},\cdots,$$

把分段中各项加起来当作一项，就得到一个新的级数$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{A}_k$，即

$$\tilde{A}_1=\tilde{a}_1+\cdots+\tilde{a}_{n_1},$$

$$\tilde{A}_2=\tilde{a}_{n_1+1}+\cdots+\tilde{a}_{n_2},\cdots,$$

$$\tilde{A}_k=\tilde{a}_{n_{k-1}+1}+\cdots+\tilde{a}_{n_k},\cdots$$

则模糊级数$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{A}_k$也是收敛的并且与$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$有相同的和．

证明 显然．

命题 2.4.4 在一个模糊级数中任意去掉或增加有限项时，不改变其敛散性．

证明 显然．

命题 2.4.5 设$\{\tilde{a}_n\}\subset\mathscr{F}^*_+(R)$，$\tilde{a}\in\mathscr{F}^*_+(R)$，如果模糊级数$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_n$都是收敛的，则$\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}\tilde{a}_n$也都是收敛的，并且

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n+\tilde{b}_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}\cdot\tilde{a}_n=\tilde{a}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$.

证明 显然．

第 二 部 分

模糊值测度与模糊值积分

第3章　模糊值测度的性质及其扩张

3.1　模糊集合的可加类

定义 3.1.1　设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，我们定义它们的和、差、联、并、交分别为：

和：$(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})(x)=\min(1,\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x))$，　　$(x\in X)$；

差：$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})(x)=\max(0,\widetilde{A}(x)-\widetilde{B}(x))$，　　$(x\in X)$；

联：$(\widetilde{A}\&\widetilde{B})(x)=\max(0,\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)-1)$，　　$(x\in X)$；

并：$(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})(x)=\max(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x))$，　　$(x\in X)$；

交：$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})(x)=\min(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x))$，　　$(x\in X)$.

注 3.1.1　由例 1.3.1 知，$\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的和就是当 S 模为 S_∞ 时的 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的模并；$\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的联就是当 T 模为 T_∞ 时的 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的模交；$\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的并就是 S 模为 S_0 时的 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的并；$\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的交就是 T 模为 T_0 时的 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的交.

注 3.1.2　$\widetilde{A}\oplus\widetilde{A}\neq\widetilde{A}$，$\widetilde{A}\&\widetilde{A}\neq\widetilde{A}$.

注 3.1.3　$(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})\&\widetilde{C}\neq(\widetilde{A}\&\widetilde{C})\ominus(\widetilde{B}\&\widetilde{C})$.

注 3.1.4　$\widetilde{A}\&\widetilde{B}\subset\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\subset\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}}\subset\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\subset\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$.

注 3.1.5　如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{P}(X)$，则 $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$，$\widetilde{A}\&\widetilde{B}=\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$，$\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}=\widetilde{A}\setminus\widetilde{B}$.

命题 3.1.1　设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，则

(1) $\widetilde{A}^c=X\ominus\widetilde{A}$；

(2) $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=(\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B})^c\oplus\widetilde{B}$；

(3) $\widetilde{A}\bigcirc\widetilde{B}=(\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B}^c)^c$；

(4) $\widetilde{A}\oplus\widetilde{A}^c=X$;

(5) $\widetilde{A}\&\widetilde{A}^c=\varnothing$.

证明

(1) 显然.

(2) $$((\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B})^c\oplus\widetilde{B})(x)=\min(1,(\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B})^c(x)+\widetilde{B}(x))$$
$$=\min(1,1-(\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B})(x)+\widetilde{B}(x))$$
$$=\min(1,1-\min(1,\widetilde{A}^c(x)+\widetilde{B}(x))+\widetilde{B}(x))$$
$$=\min(1,\max(\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x))$$
$$=(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})(x).$$

(3) $$((\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B})^c(x)=1-(\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B})(x)$$
$$=1-\min(1,1-\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x))$$
$$=\max(0,\widetilde{A}(x)-\widetilde{B}(x))$$
$$=(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})(x).$$

(4) $(\widetilde{A}\oplus\widetilde{A}^c)(x)=\min(1,\widetilde{A}(x)+1-\widetilde{A}(x))=1$.

(5) 类似(4)可证.

命题 3.1.2 设 $\widetilde{A},\widetilde{A}_n\in\mathscr{F}(X)$, $n=1,2,\cdots$, 则

(1) $\widetilde{A}\oplus(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}\oplus\widetilde{A}_n)$;

(2) $\widetilde{A}\oplus(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}\oplus\widetilde{A}_n)$;

(3) $\widetilde{A}\&(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}\&\widetilde{A}_n)$;

(4) $\widetilde{A}\&(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}\&\widetilde{A}_n)$.

证明 (1) $$(\widetilde{A}\oplus(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n))(x)=\min(1,\widetilde{A}(x)+\sup_{n\geq 1}\widetilde{A}_n(x))$$
$$=\min(1,\sup_{n\geq 1}(\widetilde{A}(x)+\widetilde{A}_n(x)))$$
$$=\sup_{n\geq 1}(\min(1,\widetilde{A}(x)+\widetilde{A}_n(x)))$$
$$=\sup_{n\geq 1}(\widetilde{A}\oplus\widetilde{A}_n)(x)$$

$$=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}\oplus\widetilde{A}_n)\right)(x).$$

(2),(3),(4)利用[0,1]是无穷分配格可以类似证明.

命题 3.1.3 设 $\widetilde{A}_i\in\mathscr{F}(X)$,$i=1,2,\cdots,n$,则

(1) $\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i\right)(x)=\min\left(1,\sum_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\right)$;

(2) $\underset{i=1}{\overset{n}{\&}}\widetilde{A}_i=\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i^c\right)^c$.

证明

(1) 当 $n=2$ 时,由定义 3.1.1,

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{2}\widetilde{A}_i\right)(x)=\min(1,\widetilde{A}_1(x)+\widetilde{A}_2(x)).$$

假设当 $n=k$ 时有 $\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i\right)(x)=\min\left(1,\sum_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i(x)\right)$,我们证明当 $n=k+1$ 时结论成立,事实上.

$$\begin{aligned}\left(\bigoplus_{i=1}^{k+1}\widetilde{A}_i\right)(x)&=\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i\oplus\widetilde{A}_{k+1}\right)(x)\\&=\min\left(1,\left(\bigoplus_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i\right)(x)+\widetilde{A}_{k+1}(x)\right)\\&=\min\left(1,\min\left(1,\sum_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i(x)\right)+\widetilde{A}_{k+1}(x)\right)\\&=\min\left(1,\sum_{i=1}^{k+1}\widetilde{A}_i(x)\right).\end{aligned}$$

所以,由数学归纳法知结论对于任何自然数成立.

(2) 同理可证.

定义 3.1.2 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$,我们定义它的和为

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\right)(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i\right)(x)\qquad(x\in X).$$

它的联为

$$\left(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\&}}\widetilde{A}_n\right)(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\underset{i=1}{\overset{n}{\&}}\widetilde{A}_i\right)(x).\qquad(x\in X).$$

命题 3.1.4 设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$,则

(1) $(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)(x)=\min\{1,\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n(x)\}$, $\quad(x\in X)$,

(2) $\&_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n^c)^c$.

证明 由命题 3.1.3 立得.

推论 3.1.1 设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$,则

(1) $(\&_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i)(x)=\max\{0,1-\sum_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i^c(x)\}$,

(2) $(\&_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)(x)=\max\{0,1-\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n^c(x)\}$.

证明 由命题 3.1.3 和 3.1.4 可证.

定义 3.1.3 设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$,

(1) 我们称 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是没有公共点的,如果 $\&_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i=\varnothing$;

(2) 我们称$\{\widetilde{A}_n\}$是没有公共点的,如果 $\&_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\varnothing$.

注 3.1.6 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{P}(X)$,则 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 没有公共点的充要条件是 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\varnothing$. 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}$ 是一般模糊集合,$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\varnothing$时,$\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 一定没有公共点,但反之不一定成立,例如,设 $X=\{1,2,3\}$, $\widetilde{A}(x)=1/(x-1)$ $\quad\widetilde{B}(x)=\dfrac{x}{x+1}$,则$(\widetilde{A}\&\widetilde{B})(x)=\max(0,\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)-1)=0$,即 $\widetilde{A}\&\widetilde{B}=\varnothing$,但$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})(x)=\min\left\{\dfrac{1}{1+x},\dfrac{x}{1+x}\right\}\neq 0$. 即 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\neq\varnothing$.

命题 3.1.5 设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$,则

(1) $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 没有公共点的充要条件是 $\sum_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\leqslant n-1$; 特别地,$\widetilde{A}_1$ 与 $\widetilde{A}_2$ 没有公共点的充要条件是$(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)(x)=\widetilde{A}_1(x)+\widetilde{A}_2(x)$;

(2) $\{\widetilde{A}_n\}$ 没有公共点的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n^c(x) \geqslant 1$.

证明 由命题 3.1.3 及推论 3.1.1 可证.

定义 3.1.4 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$.

(1) $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 被称为不交的,如果对于 $k=1,2,\cdots,n-1$,成立 $(\bigoplus_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i)\&\widetilde{A}_{k+1}=\varnothing$;

(2) $\{\widetilde{A}_n\}$被称为不交序列,如果对于任何 $n\geqslant2$,$\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是不交的.

命题 3.1.6 设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$,则

(1) $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是不交的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\leqslant 1 \qquad (x\in X);$$

(2) $\{\widetilde{A}_n\}$是不交序列的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n(x)\leqslant 1 \qquad (x\in X);$$

(3) 如果 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是不交的,则对于任何 $1\leqslant i(1)<i(2)<\cdots<i(k)\leqslant n$,有 $\widetilde{A}_{i(1)},\widetilde{A}_{i(2)},\cdots,\widetilde{A}_{i(k)}$是不交的;

(4) 不交模糊集合序列的任何子序列也是不交的模糊集合序列.

证明 因为(3)(4)可以从(1)(2)简单推出,所以我们仅证明(1)和(2).

(1) 当 $n=2$ 时,由命题 3.1.5(1)知结论成立,现在假设当 $n\leqslant m$ 时结论成立,且 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_{m+1}$ 是不交的,则

$$0=((\bigoplus_{i=1}^{m}\widetilde{A}_i)\&\widetilde{A}_{m+1})(x)=\max\left(0,\sum_{i=1}^{m+1}\widetilde{A}_i-1\right) \quad (\forall\ x\in X),$$

即,$\sum_{i=1}^{m+1}\widetilde{A}_i(x)-1\leqslant 0$. 反之,如果$\sum_{i=1}^{m+1}\widetilde{A}_i(x)\leqslant 1$,则$\sum_{i=1}^{m}\widetilde{A}_i(x)\leqslant 1$,即 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_m$ 是不交的. 因此

$$((\bigoplus_{i=1}^{m}\widetilde{A}_i)\&\widetilde{A}_{m+1})(x)=\max\left(0,\sum_{i=1}^{m+1}\widetilde{A}_i(x)-1\right)=0,$$

这就意味着 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_{m+1}$ 也是不交的.

(2) 由(1)和 S 模 S_∞ 的连续性可以证明.

推论 3.1.2 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}(X)$,则

(1) $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是不交的充要条件是

$$(\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i)(x)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i(x)\qquad(x\in X),$$

(2) $\{\widetilde{A}_n\}$ 是不交的模糊集合序列的充要条件是

$$(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n(x)\qquad(x\in X).$$

证明 由命题 3.1.6 的(1)和(2)推出.

定义 3.1.5 模糊集合 $\widetilde{A}$ 的有限(分别地,无限)模糊划分是任何不交模糊集合的任何有限(分别地,可数)类且它们的和等于 $\widetilde{A}$.

由推论 3.1.2 可知,不交模糊集合类 $\{\widetilde{A}_i\}$ 是模糊集合 $\widetilde{A}$ 的一个划分的充要条件是

$$\sum_i\widetilde{A}_i(x)=\widetilde{A}(x)\qquad(x\in X).$$

在讨论积分时将使用下面的结果.

命题 3.1.7 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$,如果 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是 $\widetilde{A}$ 的一个有限模糊划分,$\underline{B}_i=\{\widetilde{B}_{i1},\widetilde{B}_{i2},\cdots,\widetilde{B}_{ik(i)}\}$ 是 $\widetilde{A}_i$ 的一个有限模糊划分 $(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\underline{B}=\bigcup_{i=1}^{n}\underline{B}_i$ 是 A 的一个有限模糊划分.

证明 显然 $\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{k(i)}\widetilde{B}_{ij}=\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i=\widetilde{A}$. 下面我们证明 $\{\widetilde{B}_{11},\widetilde{B}_{12},\cdots,\widetilde{B}_{1k(1)},\widetilde{B}_{21},\widetilde{B}_{22},\cdots,\widetilde{B}_{2k(2)},\cdots,\widetilde{B}_{nk(n)}\}$ 是不交的. 事实上,如果对于任何 $1\leqslant k<n$,我们有

$$(\bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{k(i)}\widetilde{B}_{ij})\&\widetilde{B}_{k+1,1}=(\bigoplus_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i)\&\widetilde{B}_{k+1,1}$$

$$\subset (\bigoplus_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i)\&\widetilde{A}_{k+1}=\varnothing,$$

及

$$(((\bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{k(x)}\widetilde{B}_{ij})\oplus(\bigoplus_{h=1}^{t}\widetilde{B}_{k+1,h}))\&\widetilde{B}_{k+1,t+1})(x)$$

$$=(((\bigoplus_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i)\oplus(\bigoplus_{h=1}^{t}\widetilde{B}_{k+1,h}))\&\widetilde{B}_{k+1,t-1})(x)$$

$$\leqslant\max\left(0,\sum_{i=1}^{k}\widetilde{A}_i(x)+\sum_{h=1}^{t}\widetilde{B}_{k+1,h}(x)\right.$$

$$\left.+\widetilde{B}_{k+1,t+1}(x)-1\right)$$

$$\leqslant\max\left(0,\sum_{i=1}^{k+1}\widetilde{A}_i(x)-1\right)=0,$$

则结论成立.

命题 3.1.8 设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$,且 $\widetilde{A}\supset\widetilde{B}$.如果 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 是 $\widetilde{A}$ 的一个模糊划分,则如下定义的 $\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,\cdots,\widetilde{B}_n$ 是 $\widetilde{B}$ 的一个有限模糊划分:

$$\widetilde{B}_j(x)=\widetilde{A}_j(x),j\leqslant i(x)=\max\left\{i;\sum_{k=1}^{i}\widetilde{A}_k(x)\leqslant\widetilde{B}(x)\right\}$$

$$=\frac{\widetilde{B}(x)-\sum_{k=1}^{i(x)}\widetilde{A}_k(x)}{n-i(x)},i(x)<j\leqslant n,$$

其中　当 $\widetilde{A}_1(x)>\widetilde{B}(x)$时,$i(x)=0$.

证明　因为

$$\sum_{j=1}^{n}\widetilde{B}_j(x)=\sum_{j=1}^{i(x)}\widetilde{B}_j(x)+\sum_{j=i(x)+1}^{n}\widetilde{B}_j(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{i(x)}\widetilde{A}_j(x)+\sum_{j=i(x)+1}^{n}\frac{\widetilde{B}(x)-\sum_{j=1}^{i(x)}\widetilde{A}_j(x)}{n-i(x)}$$

$$=\widetilde{B}(x),$$

所以 $\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,\cdots,\widetilde{B}_n$ 是不交的且是 $\widetilde{B}$ 的一个模糊分划.

定义 3.1.6 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$,我们称 $\mathscr{C}$ 是一可加类,如果满足下列条件:

(1) $X\in\mathscr{C}$;

(2) 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$,则 $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B},\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}\in\mathscr{C}$.

命题 3.1.9 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类,则

(1) $\varnothing\in\mathscr{C}$;

(2) 如果 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$,则 $\widetilde{A}^c\in\mathscr{C}$;

(3) 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$,则 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B},\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$ 和 $\widetilde{A}\&\widetilde{B}\in\mathscr{C}$.

证明 显然.

定义 3.1.7 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$,我们称 $\mathscr{C}$ 是一个 σ-可加类,如果满足下列条件:

(1) $X\in\mathscr{C}$;

(2) 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$,则 $\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}\in\mathscr{C}$;

(3) 如果$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$,则$\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$.

注 3.1.7 如果 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X)$是一 σ-可加类,则 $\mathscr{C}$ 是一个 σ-代数.

命题 3.1.10 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的 σ-可加类,则

(1) $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类;

(2) 如果$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$,则 $\mathop{\&}\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$.

证明 显然.

定理 3.1.1 设 $\mathscr{C}$ 是任意一个模糊集合类,则存在唯一的最小模糊集合的可加类 $\mathscr{C}_a$(分别地,σ-可加类 $\mathscr{C}_\sigma$),使得 $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_a$(分别地,$\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_\sigma$). 称 $\mathscr{C}_a$(分别地,$\mathscr{C}_\sigma$)是由 $\mathscr{C}$ 生成的可加类(分别地,σ-可加类).

证明 我们仅证明可加类的情况,事实上,$\mathscr{F}(X)$是一个可加

类，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$. 因此

$$\mathscr{M}=\{\mathscr{C}';\mathscr{C}\subset\mathscr{C}'\subset\mathscr{F}(X),\mathscr{C}'\text{ 是可加类}\}\neq\varnothing.$$

令 $\mathscr{C}_a=\bigcap\limits_{\mathscr{C}'\in\mathscr{M}}\mathscr{C}'$. 下面我们证明 $\mathscr{C}_a$ 就是包含 $\mathscr{C}$ 的最小模糊集合的可加类. 显然 $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_a$，$X\in\mathscr{C}_a$. 如果 $\tilde{A},\tilde{B}\in\mathscr{C}_a$，则对于任何 $\mathscr{C}'\in\mathscr{M}$，$\tilde{A},\tilde{B}\in\mathscr{C}'$，因为 $\mathscr{C}'$ 是可加类，所以，$\tilde{A}\oplus\tilde{B}\in\mathscr{C}'$，$\tilde{A}\ominus\tilde{B}\in\mathscr{C}'$，从而 $\tilde{A}\oplus\tilde{B}\in\mathscr{C}_a$，$\tilde{A}\ominus\tilde{B}\in\mathscr{C}_a$. 即 $\mathscr{C}'$ 是一个可加类. 又根据 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{C}_a$ 的定义，$\mathscr{C}_a$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小可加类.

推论 3.1.3 $\mathscr{C}_\sigma=(\mathscr{C}_a)_\sigma$.

证明 因为 $\mathscr{C}_a\supset\mathscr{C}$，所以 $\mathscr{C}_\sigma\supset\mathscr{C}_a$，从而 $\mathscr{C}_\sigma\supset(\mathscr{C}_a)_\sigma$. 反之，由于 $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_a$，所以 $\mathscr{C}_\sigma\subset(\mathscr{C}_a)_\sigma$.

定理 3.1.2 设 $\mathscr{C}_0\subset\mathscr{F}(X)$，$\mathscr{C}=\mathscr{C}_0\cup\{X\}$，则 $\mathscr{C}_a$ 由下列形式的模糊集合的有限和的全体以及它们的补组成：

$$\tilde{C}=\bigoplus_{j=1}^{k}(\tilde{A}_j\&\tilde{B}_j)\quad\text{或}\quad\tilde{D}=\bigoplus_{j=1}^{k}(\tilde{A}_j\oplus\tilde{B}_j)\quad(k\in N),\tag{3.1}$$

其中对于任何指标 j，$\tilde{A}_j$ 或 $\tilde{A}_j^c$ 在 $\mathscr{C}$ 中和 $\tilde{B}_j$ 或 $\tilde{B}_j^c$ 在 $\mathscr{C}$ 中.

证明 令 $\mathscr{C}_1$ 是(3.1)所描述的模糊集合和它们的有限和以及它们的补构成的类. 显然 $\mathscr{C}_1\subset\mathscr{C}_a$，下面只要证明 $\mathscr{C}_1$ 是一个模糊集合的可加类即可. 显然 $X=X\oplus X\in\mathscr{C}_1$. 如果 $\tilde{G}\in\mathscr{C}_1$，一定有 $\tilde{G}^c\in\mathscr{C}_1$，事实上，如果 $\tilde{G}$ 是类似于(3.1)中 $\tilde{D}$，则由和与联的对偶性，$\tilde{G}^c$ 有 $\tilde{C}$ 的形式，如果 $\tilde{G}$ 有 $\tilde{C}$ 的形式，则 $\tilde{G}^c$ 有 $\tilde{D}$ 的形式. 从而一定有 $\tilde{G}^c\in\mathscr{C}_1$. 如果 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2\in\mathscr{C}_1$，则由 $\mathscr{C}_1$ 对于有限和封闭，所以 $\tilde{G}_1\oplus\tilde{G}_2\in\mathscr{C}_1$，再由 $\tilde{G}_1\ominus\tilde{G}_2=(\tilde{G}_1^c\oplus\tilde{G}_2)^c$，从而 $\tilde{G}_1\ominus\tilde{G}_2\in\mathscr{C}_1$. 故 $\mathscr{C}_1$ 是一个模糊集合的可加类.

定义 3.1.8 设 $\mathscr{M}$ 是包含 X 和 $\varnothing$ 的模糊集类.

(1) 称 $\mathscr{M}$ 是左(分别地，右)单调的，如果它关于单调减(分别地，单调增)的模糊集合列的交(分别地，并)封闭；

(2) 称 $\mathscr{M}$ 是单调的，如果它既是左单调的，又是右单调的.

定理 3.1.3

(1) 设 $\mathscr{C}$ 是模糊集合的可加类,如果它是右单调的,则它是 σ 可加类;

(2) 如果 $\mathscr{C}$ 是模糊集合的 σ-可加类,则 $\mathscr{C}$ 是单调的.

证明

(1) 只要我们证明 $\mathscr{C}$ 中任何序列的和仍在 $\mathscr{C}$ 中即可. 设 $\{\widetilde{A}_n\}<\mathscr{C}$,则令

$$\widetilde{B}_n=\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i,\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $\{\widetilde{B}_n\}$是单调增的模糊集合序列,并且由 $\mathscr{C}$ 是可加类知,$\{\widetilde{B}_n\}<\mathscr{C}$. 从而由 $\mathscr{C}$ 是右单调的,我们有

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{A}_i=\lim_{n\to\infty}\widetilde{B}_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\in\mathscr{C}.$$

(2) 我们只要证明 $\mathscr{C}$ 是右单调的即可,设$\{\widetilde{A}_n\}$是 $\mathscr{C}$ 中模糊集合的单调增序列,记 $\widetilde{A}_0=\varnothing$,则序列$\{\widetilde{B}_n\}=\{\widetilde{A}_n\ominus\widetilde{A}_{n-1}\}\subset\mathscr{C}$,并且 $\widetilde{A}_n=\bigoplus\limits_{k=1}^{n}\widetilde{B}_k,n=1,2,\cdots$. 因此,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_n=\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{k=1}^{n}\widetilde{B}_k=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\in\mathscr{C},$$

即 $\mathscr{C}$ 是右单调的.

推论 3.1.4 如果 $\mathscr{C}$ 是一个模糊集合的可加类,则下列陈述等价:

(1) $\mathscr{C}$ 是 σ-可加类;

(2) $\mathscr{C}$ 是单调的.

证明 由定理 3.1.3 立得.

推论 3.1.5 如果 $\mathscr{C}$ 是一个模糊集合的 σ-可加类,则 $\mathscr{C}$ 对其元素的至多可列并和可列交封闭.

证明 设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$,令

$$\widetilde{B}_n=\bigcup_{k=1}^{n}\widetilde{A}_k,\quad n=1,2,\cdots,$$

则$\{\widetilde{B}_n\}$是一个$\mathscr{C}$中的单调增的序列，再由推论 3.1.4，我们有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n=\lim_{n\to\infty}\widetilde{B}_n\in\mathscr{C}.$$

又由于$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n^c\right)^c$，所以，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$.

定理 3.1.4 设$\mathscr{C}$是任意一个模糊集合类，则存在唯一的最小单调类$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，使得$\mathscr{C}\subset\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$. 称$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$为由$\mathscr{C}$生成的单调类.

证明 类似于定理 3.1.1 可证.

定理 3.1.5 设$\mathscr{C}$是模糊集合的可加类，则

$$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}=\mathscr{C}_{\sigma}.$$

证明 因为$\mathscr{C}_{\sigma}$是包含$\mathscr{C}$的σ-可加类，由推论 3.1.4 它是单调类，但$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$是包含$\mathscr{C}$的最小单调类，所以$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}\subset\mathscr{C}_{\sigma}$.

下面我们只要证明$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$是一个可加类. 也就是要证明，对于任何$\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，$\widetilde{E}\oplus\widetilde{F}$，$\widetilde{E}\ominus\widetilde{F}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$. 事实上，对于任何$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，我们记

$$\mathscr{K}(\widetilde{A})=\{\widetilde{B};\widetilde{B}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}},\widetilde{A}\oplus\widetilde{B},\widetilde{A}\ominus\widetilde{B},\widetilde{B}\ominus\widetilde{A}\text{ 均属于 }\mathscr{C}_{\mathscr{M}}\}.$$

设$\{\widetilde{B}_n\}$是$\mathscr{K}(\widetilde{A})$中的任一单调序列，因为$\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}_n$，$\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}_n$、$\widetilde{B}_n\ominus\widetilde{A}$均属于$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，且也是单调的序列，由命题 3.1.1 和命题 3.1.2，我们有

$$\widetilde{A}\oplus\lim_{n\to\infty}\widetilde{B}_n=\lim_{n\to\infty}(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}_n)\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}};$$

$$\widetilde{A}\ominus\lim_{n\to\infty}\widetilde{B}_n=\lim_{n\to\infty}(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}_n)\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{B}_n\ominus\widetilde{A}=\lim_{n\to\infty}(\widetilde{B}_n\ominus\widetilde{A})\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{B}_n\in\mathscr{K}(\widetilde{A})$，即$\mathscr{K}(\widetilde{A})$是一个单调类.

特别，取$\widetilde{A}=\widetilde{E}\in\mathscr{C}$时，显然$\mathscr{C}\subset\mathscr{K}(\widetilde{E})\subset\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，又因为$\mathscr{K}(\widetilde{E})$是包含$\mathscr{C}$的单调类，从而$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}\subset\mathscr{K}(\widetilde{E})$，因此，

$$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}=\mathscr{K}(\widetilde{E}).$$

$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}=\mathscr{K}(\widetilde{E})$表示：当$\widetilde{E}\in\mathscr{C}$时，对于任何$\widetilde{F}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，总有$\widetilde{E}\oplus\widetilde{F}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，$\widetilde{E}\ominus\widetilde{F}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$和$\widetilde{F}\ominus\widetilde{E}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$. 即$\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$是一个可加类.

对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，根据上述证明，当 $\widetilde{F}\in\mathscr{C}$ 时，$\widetilde{E}\oplus\widetilde{F}$，$\widetilde{E}\ominus\widetilde{F}$，$\widetilde{F}\bigcirc\widetilde{E}$ 均属于 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$，从而 $\mathscr{C}\subset\mathscr{K}(\widetilde{E})\subset\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$. 再由 $\mathscr{K}(\widetilde{E})$ 是单调类，所以 $\mathscr{K}(\widetilde{E})=\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$. 即 $\mathscr{C}_{\mathscr{M}}$ 是可加类.

推论 3.1.6 设 $\mathscr{M}$，$\mathscr{C}$ 是两个模糊集合类，如果 $\mathscr{M}$ 是单调类，$\mathscr{C}$ 是可加类. 并且 $\mathscr{M}\supset\mathscr{C}$，则 $\mathscr{M}\supset\mathscr{C}_{\sigma}$.

证明 由定理 3.1.5 可以立得.

定理 3.1.6 设 $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{F}(X)$，则 $\mathscr{C}_{\sigma}$ 是由 $\mathscr{C}_{a}$ 中的元素的可数交的所有可数并以及可数交的可数并的补集所构成.

证明 设 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{C}_{a}$ 中的元素的可数交的可数并以及它们的补的全体构成的模糊集合类. 由 $\mathscr{C}_{\sigma}$ 的定义命题 3.1.1 知 $\mathscr{C}_{\sigma}\subset\mathscr{M}\subset\mathscr{C}_{\sigma}$. 下面我们只要证明 $\mathscr{M}$ 是一模糊集合的 σ-可加类即可. 事实上，设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{M}$，则 $\widetilde{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_{n}$，$\widetilde{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n}$，其中 $\widetilde{A}_{n}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{A}_{nk}$，$\widetilde{B}_{n}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{B}_{nk}$，且 $\widetilde{A}_{nk},\widetilde{B}_{nk}\in\mathscr{C}_{a}$ $n=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots$，由命题 3.1.2，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_{n}\oplus\widetilde{B}\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}_{n}\oplus\widetilde{B})\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}_{n}\oplus(\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{B}_{k}))\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(\widetilde{A}_{n}\oplus\widetilde{B}_{k})\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}((\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{A}_{n_i})\oplus\widetilde{B}_{k})\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty}(\widetilde{A}_{n_i}\oplus\widetilde{B}_{k}))\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}(\widetilde{A}_{n_i}\oplus\widetilde{B}_{k_j})).\end{aligned}$$

因为 $\mathscr{C}_{a}$ 是一个可加类，所以 $\widetilde{A}_{n_i}\oplus\widetilde{B}_{k_j}\in\mathscr{C}_{a}$，$n,i,k,j=1,2,\cdots$. 再

由 $\mathscr{M}$ 的定义知，$\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}\in\mathscr{M}$. 又因为 $\mathscr{M}$ 对于补封闭，所以 $\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}=(\widetilde{A}^c\oplus\widetilde{B})^c\in\mathscr{M}$. 从而 $\mathscr{M}$ 是一个可加类. 为了证明 $\mathscr{M}$ 是右单调类，我们考虑单调增的序列 $\widetilde{S}_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{S}_{nk}$，其中 $\widetilde{S}_{nk}=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\widetilde{T}_{nkj}$，且 $\widetilde{T}_{nkj}\in\mathscr{C}_a$，$n,k,j=1,2,\cdots$，则我们有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{S}_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{S}_{nk})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{S}_{nk}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{j=1}^{\infty}\widetilde{T}_{nkj})\in\mathscr{M}.$$

再使用推论 3.1.4，$\mathscr{M}$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-可加类，这样 $\mathscr{M}=\mathscr{C}_\sigma$.

3.2 模糊值测度的定义及其性质

定义 3.2.1 设 $\mathscr{C}$ 是任意一个模糊集合类，$\mu:\mathscr{C}\to\mathscr{F}^*(R)$ 称为可加的，如果对于任意的 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，$\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，且 $\widetilde{A}\&\widetilde{B}=\varnothing$，有

$$\mu(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A})+\mu(\widetilde{B});$$

称 μ 是单调的，如果对于任意的 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，$\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$ 有

$$\mu(\widetilde{A})\leqslant\mu(\widetilde{B});$$

称 μ 是 σ- 可加的，如果对于 $\mathscr{C}$ 中任意不交列 $\{\widetilde{A}_n\}$，且 $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$，有

$$\mu(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

命题 3.2.1 设 μ 是可加的，$\varnothing\in\mathscr{C}$，如果存在 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$ 使得 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，则 $\mu(\varnothing)=0$.

证明 因为 $\widetilde{A}\oplus\varnothing=\widetilde{A}$，$\widetilde{A}\&\varnothing=\varnothing$，所以，由 μ 的可加性

$$\mu(\widetilde{A})=\mu(\widetilde{A})+\mu(\varnothing),$$

再由定理 2.1.8

$$\mu(\varnothing) = 0.$$

命题 3.2.2 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，μ 是可加的，则对于任何的 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，有

$$\mu(\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{B}) = \mu(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) + \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}),$$

进一步地，如果 $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}\in\mathscr{C}$，我们有

$$\begin{aligned}&\mu(\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{B}) + \mu(\widetilde{C}) + \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \cap \widetilde{C}) \\ =&\mu(\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \cup \widetilde{C}) + \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) + \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{C}) + \mu(\widetilde{B} \cap \widetilde{C}).\end{aligned}$$

证明

(1) 因为 $\widetilde{A}=(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})\oplus(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})$，$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})\&(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})=\varnothing$

$$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})\oplus\widetilde{B},(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})\&\widetilde{B}=\varnothing.$$

所以，由 μ 的可加性

$$\mu(\widetilde{A}) = \mu(\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}) + \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}),$$

$$\mu(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) = \mu(\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}) + \mu(\widetilde{B}),$$

故

$$\mu(\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{B}) = \mu(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) + \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}).$$

(2) 由(1)可证.

命题 3.2.3 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，如果存在 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$ 使得 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，则 μ 是可加的充分必要条件是对于任何 $\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{C}$，有

$$\mu(\widetilde{E}) + \mu(\widetilde{F}) = \mu(\widetilde{E} \oplus \widetilde{F}) + \mu(\widetilde{E}\&\widetilde{F}).$$

证明 因为 $\widetilde{B}=[\widetilde{B}\ominus(\widetilde{A}\&\widetilde{B})]\oplus(\widetilde{A}\&\widetilde{B})$，$[\widetilde{B}\ominus(\widetilde{A}\&\widetilde{B})]\&(\widetilde{A}\&\widetilde{B})=\varnothing$，

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \ominus (\widetilde{A}\&\widetilde{B})),\widetilde{A}\&(\widetilde{B} \ominus (\widetilde{A}\&\widetilde{B})) = \varnothing,$$

所以，由 μ 的可加性，有

$$\mu(\widetilde{B}) = \mu(\widetilde{B} \ominus (\widetilde{A}\&\widetilde{B})) + \mu(\widetilde{A}\&\widetilde{B}),$$

$$\mu(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) = \mu(\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{B} \ominus (\widetilde{A}\&\widetilde{B})),$$

故

$$\mu(\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{B}) = \mu(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) + \mu(\widetilde{A}\&\widetilde{B}).$$

反之，由命题 3.2.1 立得.

推论 3.2.1 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，如果 μ 是可加的，则对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，有

$$\mu(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})+\mu(\widetilde{A}\&\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})+\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}).$$

特别地，当 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\varnothing$ 时，

$$\mu(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}).$$

证明 显然.

命题 3.2.4 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，如果 μ 是可加的，则对于任何 $\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{C}$ 且 $\widetilde{E}\subset\widetilde{F}$，有

$$\mu(\widetilde{F})=\mu(\widetilde{E})+\mu(\widetilde{F}\ominus\widetilde{E}).$$

证明 因为 $\widetilde{F}=\widetilde{E}\oplus(\widetilde{F}\ominus\widetilde{E})$，$\widetilde{E}\&(\widetilde{F}\ominus\widetilde{E})=\varnothing$，我们由 μ 的可加性立得.

推论 3.2.2 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，如果 μ 是可加的且对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，$\mu(\widetilde{A})\geqslant 0$，则 μ 是单调的.

证明 显然.

定义 3.2.2 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的类，$\mu:\mathscr{C}\to\mathscr{F}^*(R)$，称 μ 在 $\mathscr{C}$ 上是下连续的，如果对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$，$\widetilde{A}_1\subset\widetilde{A}_2\subset\cdots$，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，有 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)$ 存在，及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=\mu(\widetilde{A});$$

称 μ 在 $\mathscr{C}$ 上是上连续的，如果对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$，$\widetilde{A}_1\supset\widetilde{A}_2\supset\cdots$，且存在 n_0 使得 $\mu(\widetilde{A}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$ 及 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，有 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)$ 存在，及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

定理 3.2.1 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的 σ-可加类，则 μ 是 σ-可加的充要条件是 μ 在 $\mathscr{C}$ 上是下连续的及可加的.

证明 设 μ 是 σ-可加的，$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$，且 $\widetilde{A}_1\subset\widetilde{A}_2\subset\cdots$ 记 $\widetilde{A}_0=\varnothing$，$\widetilde{B}_n=\widetilde{A}_n\ominus\widetilde{A}_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，我们可以证明

$$\widetilde{A}_n = \bigoplus_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i,\ n = 1,2,\cdots,$$

且$\{\widetilde{B}_n\} \subset \mathscr{C}$是一列不交的模糊集合，进一步地，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\widetilde{A}_n \ominus \widetilde{A}_{n-1}).$$

所以

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n) &= \mu(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{B}_n) \\
&= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(\widetilde{B}_i) \\
&= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\bigoplus_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i) \\
&= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n).
\end{aligned}$$

反之，设$\{\widetilde{A}_n\}$是$\mathscr{C}$中的不交列，则$\widetilde{B}_n = \bigoplus_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k \in \mathscr{C}$，且$\widetilde{B}_1 \subset \widetilde{B}_2 \subset \cdots$，进一步地，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n.$$

所以

$$\begin{aligned}
\mu(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n) \\
&= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n) \\
&= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\bigoplus_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k) \\
&= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(\widetilde{A}_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{A}_n).
\end{aligned}$$

定义 3.2.3 设$\mathscr{C}$是任意一个模糊集合类，$\mu: \mathscr{C} \to \mathscr{F}_+^*(R)$，

如果 μ 满足下列条件：

(1) 如果 $\varnothing\in\mathscr{C}$，$\mu(\varnothing)=0$；

(2) μ 是可加的；

(3) μ 在 $\mathscr{C}$ 上是下连续的.

则称 μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度.

命题 3.2.5 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，μ 是可加的及对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，$\mu(\widetilde{A})\geqslant 0$，如果 $\{\widetilde{E}_1,\cdots,\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{C}$，$\widetilde{E}\in\mathscr{C}$，且 $\widetilde{E}\subset\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{E}_i$，则

$$\mu(\widetilde{E})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(\widetilde{E}_i)$$

进一步地，如果 μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{C}$，且 $\widetilde{E}\subset\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n\in\mathscr{C}$，则

$$\mu(\widetilde{E})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_n).$$

证明 因为 $\widetilde{E}\subset\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{E}_i$，所以，由推论 3.2.2 知

$$\mu(\widetilde{E})\leqslant\mu(\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{E}_i).$$

我们令

$$\widetilde{G}_1=\widetilde{E}_1,\widetilde{G}_i=\widetilde{E}_i\ominus(\widetilde{E}_i\&\bigoplus_{j=1}^{i-1}\widetilde{E}_j),\ i=2,3,\cdots,n.$$

则 $\{\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2,\cdots,\widetilde{G}_n\}\subset\mathscr{C}$，且它们是不交的和

$$\widetilde{G}_i\subset\widetilde{E}_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

以及

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{E}_i=\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{G}_i.$$

从而，由 μ 的可加性及单调性

$$\mu(\widetilde{E})\leqslant\mu(\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{E}_i)$$

$$=\mu(\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{G}_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu(\widetilde{G}_i)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(\widetilde{E}_i).$$

命题 3.2.6 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\{\widetilde{E}_n\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中不交的有限或可列类，并且 $\bigoplus_i\widetilde{E}_i\in\mathscr{C}$，及 $\bigoplus_i\widetilde{E}_i\subset\widetilde{E}\in\mathscr{C}$，则

$$\sum_i\mu(\widetilde{E}_i)\leqslant\mu(\widetilde{E}).$$

证明 显然.

定理 3.2.2 设 $\mathscr{C}$ 是模糊集合的可加类，μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，则 μ 是上连续的.

证明 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$ 及 $\widetilde{A}_n\searrow\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$，且存在 n_0 使得 $\mu(\widetilde{A}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$. 则对于任何 $n\geqslant n_0$，由 μ 的单调性，有

$$0\leqslant\mu(\widetilde{A}_n)\leqslant\mu(\widetilde{A}_{n_0}),$$

又因为 $\widetilde{A}_{n_0}\ominus\widetilde{A}_n\nearrow\widetilde{A}_{n_0}\ominus(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)$，所以，由定理 3.2.1 和定理 2.4.1，我们有

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{A}_{n_0})&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}_{n_0}\ominus\widetilde{A}_n)\oplus\widetilde{A}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_{n_0}\ominus\widetilde{A}_n)+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\\&=\mu\Big(\widetilde{A}_{n_0}\ominus(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\Big)+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{A}_{n_0})+\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=&\mu\Big(\widetilde{A}_{n_0}\ominus(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\Big)\\&+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)+\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\end{aligned}$$

$$=\mu(\widetilde{A}_{n_0})+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

这样

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n).$$

定理 3.2.3 设 μ 是定义在模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的非负模糊值模糊集函数，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty};\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，如果 μ 是可加的及零上连续的，则 μ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个模糊值测度.

证明 设 $\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$，$n=1,2,\cdots$，$\widetilde{A}_n\nearrow\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$，则 $(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\ominus\widetilde{A}_n$ 是单减序列，且

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\ominus\widetilde{A}_n\searrow\varnothing.$$

这样，由命题 3.2.1 和定理 2.4.1，我们有

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)&=\mu(((\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\ominus\widetilde{A}_n)\oplus\widetilde{A}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\ominus\widetilde{A}_n)+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\\&=0+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).\end{aligned}$$

即 μ 是下连续的.

命题 3.2.7 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\widetilde{E}$，$\widetilde{F}\in\mathscr{C}$，用 $\widetilde{E}\sim\widetilde{F}$ 表示 $\mu(\widetilde{E}\triangle\widetilde{F})=0$，则关系"$\sim$"具有自反性、对称性和推移性. 如果 $\widetilde{E}\sim\widetilde{F}$，则 $\mu(\widetilde{E})=\mu(\widetilde{F})=\mu(\widetilde{E}\&\widetilde{F})$，其中 $\widetilde{E}\triangle\widetilde{F}=(\widetilde{E}\ominus\widetilde{E}\&\widetilde{F})\oplus(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E}))$.

证明 (1) 由"$\sim$"的定义可知它具有自反性、对称性. 下面我们证明推移性. 事实上，设 $\widetilde{E},\widetilde{F},\widetilde{G}\in\mathscr{C}$，且 $\widetilde{E}\sim\widetilde{F}$，$\widetilde{F}\sim\widetilde{G}$，则由

$$\widetilde{E}\triangle\widetilde{G}\subset(\widetilde{E}\triangle\widetilde{F})\oplus(\widetilde{F}\triangle\widetilde{G}),$$

及 μ 的次可加性可知

$$\mu(\widetilde{E}\triangle\widetilde{G})\leqslant\mu(\widetilde{E}\triangle\widetilde{F})+\mu(\widetilde{F}\triangle\widetilde{G})$$

再由 $\widetilde{E}\sim\widetilde{F},\widetilde{F}\sim\widetilde{G}$，我们有

$$\mu(\widetilde{E}\triangle\widetilde{G})=0$$

即 $\widetilde{E}\sim\widetilde{G}$.

(2) 由于 $\widetilde{E}=(\widetilde{E}\ominus(\widetilde{E}\&\widetilde{F}))\oplus(\widetilde{E}\&\widetilde{F})$ 且 $\widetilde{E}\ominus(\widetilde{E}\&\widetilde{F})$ 与 $\widetilde{E}\&\widetilde{F}$ 是不交的，则由 μ 的可加性，

$$\mu(\widetilde{E})=\mu(\widetilde{E}\ominus(\widetilde{E}\&\widetilde{F}))+\mu(\widetilde{E}\&\widetilde{F}).$$

再由 $\widetilde{E}\sim\widetilde{F}$，即 $\mu((\widetilde{E}\ominus(\widetilde{E}\&\widetilde{F}))\oplus(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E})))=0$ 知

$$\mu(\widetilde{E})=\mu(\widetilde{E}\&\widetilde{F}).$$

同理

$$\mu(\widetilde{F})=\mu(\widetilde{E}\&\widetilde{F}).$$

命题 3.2.8 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，令 $\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{F})=\mu(\widetilde{E}\triangle\widetilde{F})$，则 $\widetilde{d}$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个模糊值拟度量，即 $\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{F})\geqslant 0,\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{F})=\widetilde{d}(\widetilde{F},\widetilde{E})$，和 $\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{G})\leqslant\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{F})+\widetilde{d}(\widetilde{F},\widetilde{G})$. 如果 $\widetilde{E}_1\sim\widetilde{E}_2,\widetilde{F}_1\sim\widetilde{F}_2$，则 $\widetilde{d}(\widetilde{E}_1,\widetilde{F}_1)=\widetilde{d}(\widetilde{E}_2,\widetilde{F}_2)$.

证明 (1) 由 $\widetilde{d}$ 的定义，显然有

$$\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{F})\geqslant 0 \text{ 及 } \widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{F})=\widetilde{d}(\widetilde{F},\widetilde{E}),\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{C}.$$

下面证明 $\widetilde{d}$ 满足三角不等式，事实上，因为

$$\widetilde{E}\triangle\widetilde{G}\subset(\widetilde{E}\triangle\widetilde{F})\oplus(\widetilde{F}\triangle\widetilde{G})$$

及 μ 的次可加性，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{G})&=\mu(\widetilde{E}\triangle\widetilde{G})\\&\leqslant\mu(\widetilde{E}\triangle\widetilde{F})+\mu(\widetilde{F}\triangle\widetilde{G})\\&=\widetilde{d}(\widetilde{E},\widetilde{F})+\widetilde{d}(\widetilde{F},\widetilde{G}).\end{aligned}$$

(2) 因为 $\widetilde{E}_1\sim\widetilde{E}_2,\widetilde{F}_1\sim\widetilde{F}_2$，所以

$$\widetilde{d}(\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2)=\mu(\widetilde{E}_1\triangle\widetilde{E}_2)=0,$$
$$\widetilde{d}(\widetilde{F}_1,\widetilde{F}_2)=\mu(\widetilde{F}_1\triangle\widetilde{F}_2)=0.$$

从而，由 $\widetilde{d}$ 的三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{d}(\widetilde{E}_1,\widetilde{F}_1)\\&=\widetilde{d}(\widetilde{E}_1,\widetilde{F}_1)+\widetilde{d}(\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2)+\widetilde{d}(\widetilde{F}_1,\widetilde{F}_2)\end{aligned}$$

$$\geqslant \tilde{d}(\tilde{E}_2,\tilde{E}_1)+\tilde{d}(\tilde{E}_1,\tilde{F}_2)$$
$$\geqslant \tilde{d}(\tilde{E}_2,\tilde{F}_2).$$

同理

$$\tilde{d}(\tilde{E}_2,\tilde{F}_2)\geqslant \tilde{d}(\tilde{E}_1,\tilde{F}_1).$$

定义 3.2.4 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值模糊集函数，如果对于任何 $\mathscr{C}$ 中的不交序列 $\{\tilde{E}_n\}$ 有 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\tilde{E}_n)=0$，则称 μ 是穷举的.

命题 3.2.9 设 μ 是定义在模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty};\tilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，则 μ 是穷举的.

证明 设 $\{\tilde{E}_n\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中任意一个不交序列，则

$$\bigoplus_{k=n}^{\infty}\tilde{E}_k\searrow\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigoplus_{k=n}^{\infty}\tilde{E}_k=\varnothing.$$

由定理 3.2.2，

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\bigoplus_{k=n}^{\infty}\tilde{E}_k)=0.$$

再由

$$\mu(\tilde{E}_n)\leqslant\mu(\bigoplus_{k=n}^{\infty}\tilde{E}_k),$$

我们有

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{E}_n)=0.$$

定理 3.2.4 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\tilde{A});\tilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，如果 $\{\tilde{E}_n\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个序列，并且

$$\bigcap_{i=n}^{\infty}\tilde{E}_i\in\mathscr{C},n=1,2,\cdots,\text{且}\liminf_{n}\tilde{E}_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}\tilde{E}_i\in\mathscr{C},$$

则

$$\mu(\liminf_{n}\tilde{E}_n)\leqslant(\tilde{\rho})\liminf_{n}\mu(\tilde{E}_n).$$

类似地，如果

$$\bigcup_{i=n}^{\infty}\tilde{E}_i\in\mathscr{C},n=1,2,\cdots,\text{且}\limsup_{n}\tilde{E}_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\tilde{E}_i\in\mathscr{C},$$

并且至少存在 n_0 使得 $\mu(\bigcup_{i=n_0}^{\infty}\widetilde{E}_i)\neq\widetilde{\infty}$，则

$$\mu(\limsup_n \widetilde{E}_n)\geqslant(\widetilde{\rho})\limsup_n \mu(\widetilde{E}_n).$$

证明 因为 $\{\bigcap_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的单增序列，由 μ 的下连续性，我们有

$$\mu(\liminf_n \widetilde{E}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcap_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i).$$

再由 μ 的单调性，对于任何 $i=n,n+1,\cdots$，

$$\mu(\bigcap_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i)\leqslant\mu(\widetilde{E}_i).$$

所以

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_i)\leqslant\inf_{i\geqslant n}\mu(\widetilde{E}_i).$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcap_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i)\leqslant(\widetilde{\rho})\liminf_n \mu(\widetilde{E}_n).$$

类似可以证明

$$\mu(\limsup_n \widetilde{E}_n)\geqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\sup_{i\geqslant n}\mu(\widetilde{E}_i)$$

推论 3.2.3 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty};\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，如果 $\{\widetilde{E}_n\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个序列，并且 $\lim_{n\to\infty}\widetilde{E}_n\in\mathscr{C}$，则

$$\mu(\lim_{n\to\infty}\widetilde{E}_n)\geqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n).$$

证明 由定理 3.2.4 和定理 2.4.3 立得.

推论 3.2.4 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty};\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，如果 $\{\widetilde{E}_n\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个序列，并且

$$\bigcup_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i\in\mathscr{C},n=1,2,\cdots,\text{且}\limsup_n \widetilde{E}_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i\in\mathscr{C},$$

以及存在 n_0 使得 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_n)\neq\widetilde{\infty}$，则

$$\mu(\limsup_n \widetilde{E}_n) = 0.$$

证明 因为对于任何 n，

$$\limsup_n \widetilde{E}_n \subset \bigcup_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i.$$

因此，由 μ 的单调性及次可加性，即得

$$\mu(\limsup_n \widetilde{E}_n) \leqslant \mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}\widetilde{E}_i) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_i).$$

又因为 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_n) \neq \widetilde{\infty}$，所以

$$\mu(\limsup_n \widetilde{E}_n) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_i) = 0$$

再由 μ 的非负性

$$\mu(\limsup_n \widetilde{E}_n) = 0.$$

定理 3.2.5 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，我们定义

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}) = (\mu(\widetilde{A}))_\lambda^-, \mu_\lambda^+(\widetilde{A}) = (\mu(\widetilde{A}))_\lambda^+, \widetilde{A} \in \mathscr{C}, \lambda \in (0,1].$$

则 $\mu_\lambda^-,\mu_\lambda^+$ $\lambda\in(0,1]$都是模糊集可加类 $\mathscr{C}$ 上的广义实值测度. 反之，如果 $\mu_\lambda^-,\mu_\lambda^+$ $\lambda\in(0,1]$都是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的广义实值测度，且对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$ 及 $\lambda_1<\lambda_2$ 有

$$[\mu_{\lambda_2}^-(\widetilde{A}),\mu_{\lambda_2}^+(\widetilde{A})] \subset [\mu_{\lambda_1}^-(\widetilde{A}),\mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{A})],$$

和对于 $\lambda\in(0,1]$ $\mu_\lambda^-,\mu_\lambda^+$ 一致下连续，则我们如下定义的模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值模糊集函数 μ 是一个模糊值测度.

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\mu_\lambda^-(\widetilde{A}),\mu_\lambda^+(\widetilde{A})], \qquad \widetilde{A} \in \mathscr{C}.$$

证明 由于 μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，根据定义 3.2.23、定义 2.1.6 和定理 2.3.2，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\mu_\lambda^-,\mu_\lambda^+$ 都是模糊集可加类 $\mathscr{C}$ 上的实值测度.

反之，由 $\widetilde{\mu}$ 的定义可知，对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，$\widetilde{\mu}(\widetilde{A})\in\mathscr{F}^+_*(R)$.

(1) 因为 μ_λ^-，μ_λ^+ $\lambda\in(0,1]$是 $\mathscr{C}$ 上的测度，所以

$$\mu_\lambda^-(\varnothing)=0,\mu_\lambda^+(\varnothing)=0,\qquad \lambda\in(0,1]$$

所以 $\widetilde{\mu}(\varnothing)=0$.

(2) 对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$ 且 $\widetilde{A}\&\widetilde{B}=\varnothing$，由于 μ_λ^-，μ_λ^+，$\lambda\in(0,1]$ 是 $\mathscr{C}$ 上的测度，所以

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})=\mu_\lambda^-(\widetilde{A})+\mu_\lambda^-(\widetilde{B}),\qquad \lambda\in(0,1]$$

和

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})=\mu_\lambda^+(\widetilde{A})+\mu_\lambda^+(\widetilde{B}),\qquad \lambda\in(0,1]$$

所以，由模糊数的运算性质知

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}),\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\mu_\lambda^-(\widetilde{A})+\mu_\lambda^-(\widetilde{B}),\mu_\lambda^+(\widetilde{A})+\mu_\lambda^+(\widetilde{B})]\\&=\widetilde{\mu}(\widetilde{A})+\widetilde{\mu}(\widetilde{B}).\end{aligned}$$

(3) 对于任何的$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$，且 $\widetilde{A}_n\nearrow\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$，由于 μ_λ^-，μ_λ^+ 对于 $\lambda\in(0,1]$是一致下连续的，则

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^-(\widetilde{A}_n)=\mu_\lambda^-(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n);$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+(\widetilde{A}_n)=\mu_\lambda^+(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n).$$

对于 $\lambda\in(0,1]$一致成立. 所以，由定理 2.3.2 知

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_n)=\widetilde{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n).$$

这就证明了 $\widetilde{\mu}$ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值的测度.

3.3 模糊值测度的扩张

记 $\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}=\{\widetilde{A};\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，存在$\{\widetilde{A}_n\}\in\mathscr{C}$ 使得 $\widetilde{A}_n\nearrow\widetilde{A}\}$，其中 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类.

命题 3.3.1 $\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$ 有如下的结构特征:

(1) $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$;

(2) 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$,则 $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B},\widetilde{A}\&\widetilde{B},\widetilde{A}\cup\widetilde{B},\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$;

(3) 如果 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$,且 $\widetilde{A}_n\nearrow\widetilde{A}$,则 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$. 特别地,如果 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$.

证明

(1) 显然.

(2) 因为 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$,所以存在 $\{\widetilde{A}_n\},\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{C}$,使得 $\widetilde{A}_n\nearrow\widetilde{A}$, $\widetilde{B}_n\nearrow\widetilde{B}$. 我们记

$$\widetilde{C}_n=\widetilde{A}_n\oplus\widetilde{B}_n,\widetilde{D}_n=\widetilde{A}_n\&\widetilde{B}_n,\widetilde{E}_n=\widetilde{A}_n\cup\widetilde{B}_n,\widetilde{F}_n=\widetilde{A}_n\cap\widetilde{B}_n,$$

则 $\widetilde{C}_n,\widetilde{D}_n,\widetilde{E}_n,\widetilde{F}_n\in\mathscr{C},n=1,2,\cdots$. 并且 $\{\widetilde{C}_n\},\{\widetilde{D}_n\},\{\widetilde{E}_n\},\{\widetilde{F}_n\}$ 都是单增序列. 又因为对于任何 $x\in X$,我们有

$$\begin{aligned}(\lim_{n\to\infty}\widetilde{C}_n)(x)&=\lim_{n\to\infty}\widetilde{C}_n(x)\\&=\lim_{n\to\infty}(\widetilde{A}_n\oplus\widetilde{B}_n)(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\min(1,\widetilde{A}_n(x)+\widetilde{B}_n(x))\\&=\min(1,\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_n(x)+\lim_{n\to\infty}\widetilde{B}_n(x))\\&=\min(1,\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x))\\&=(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})(x).\end{aligned}$$

于是 $\widetilde{C}_n\nearrow\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$. 由 $\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$ 的定义可知 $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$. 类似地,我们可以证明,$\widetilde{A}\&\widetilde{B},\widetilde{A}\cup\widetilde{B},\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$.

(3) 对于任何自然数 n,存在 $\{\widetilde{A}_{nm}\}\subset\mathscr{C}$,使得 $\widetilde{A}_{nm}\nearrow\widetilde{A}_n$. 设

$$\widetilde{B}_m=\widetilde{A}_{1m}\cup\widetilde{A}_{2m}\cup\cdots\cup\widetilde{A}_{mm}.$$

则 $\{\widetilde{B}_m\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的单调增序列,且对于任何 $n\leqslant m$,有

$$\widetilde{A}_{nm}\subset\widetilde{B}_m\subset\widetilde{A}_m.$$

所以

$$\widetilde{A}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{A}_{nm} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{B}_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{A}_m = \widetilde{A},$$

故

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{B}_m = \widetilde{A}.$$

即 $\widetilde{B}_m \nearrow \widetilde{A}$. 从而，$\widetilde{A} \in \mathscr{C}^{-}_{\mathscr{A}}$.

命题 3.3.2 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，对于 $\mathscr{C}$ 中任何单调增序列 $\{\widetilde{A}_n\}$，$\{\widetilde{B}_n\}$，如果 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n$，则

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n).$$

证明 因为 $\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_m \nearrow \widetilde{A}_n \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{B}_m = \widetilde{A}_n$，所以由 μ 的单调性和下连续性，我们有

$$\mu(\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_m) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu(\widetilde{B}_m),$$

因此

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n).$$

定理 3.3.1 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，μ 可以扩张到 $\mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$ 上.

证明 对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$，我们定义

$$\overline{\mu}(\widetilde{A}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n),$$

其中 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{C}$，且 $\widetilde{A}_n \nearrow \widetilde{A}$. 下面证明 $\overline{\mu}$ 是 $\mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$ 上的模糊值测度.

(1) 我们首先证明 $\overline{\mu}$ 的定义是无歧义的. 事实上，如果对于 $\widetilde{A} \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$，存在 $\mathscr{C}$ 中单调增序列 $\{\widetilde{A}_n\}$，$\{\widetilde{B}_n\}$ 使得

$$\widetilde{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n.$$

由命题 3.3.2 知

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n)$$

和

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n).$$

所以

$$\bar{\mu}(\widetilde{A}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n).$$

(2) 对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$，由命题 3.3.1 知 $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B},\widetilde{A}\&\widetilde{B},\widetilde{A}\cup\widetilde{B},\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$，且 $\widetilde{A}_n\oplus\widetilde{B}_n\nearrow\widetilde{A}\oplus\widetilde{B},\widetilde{A}_n\&\widetilde{B}_n\nearrow\widetilde{A}\&\widetilde{B},\widetilde{A}_n\cup\widetilde{B}_n\nearrow\widetilde{A}\cup\widetilde{B},\widetilde{A}_n\cap\widetilde{B}_n\nearrow\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$，其中 $\{\widetilde{A}_n\},\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{C}$ 且 $\widetilde{A}_n\nearrow\widetilde{A},\widetilde{B}_n\nearrow\widetilde{B}$. 由命题 3.2.2 和命题 3.2.3，对于任何自然数 n，我们有

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{A}_n) + \mu(\widetilde{B}_n) &= \mu(\widetilde{A}_n \oplus \widetilde{B}_n) + \mu(\widetilde{A}_n\&\widetilde{B}_n)\\ &= \mu(\widetilde{A}_n \cup \widetilde{B}_n) + \mu(\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\widetilde{A}) + \bar{\mu}(\widetilde{B}) &= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n) + (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)\\ &= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \oplus \widetilde{B}_n) + (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n\&\widetilde{B}_n)\\ &= \bar{\mu}(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) + \bar{\mu}(\widetilde{A}\&\widetilde{B}).\end{aligned}$$

同理

$$\bar{\mu}(\widetilde{A}) + \bar{\mu}(\widetilde{B}) = \bar{\mu}(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) + \bar{\mu}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}).$$

(3) 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$，且 $\widetilde{A}_n\nearrow$，则由命题 3.3.1 知 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$.
所以，存在 $\{\widetilde{B}_m\}\subset\mathscr{C}$ 使得 $\widetilde{B}_m\nearrow\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n$.

故

$$\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n).$$

另一方面，根据命题 3.3.1 证明中 $\widetilde{B}_m$ 的构造，

$$\widetilde{B}_m \subset \widetilde{A}_m.$$

所以

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty}\mu(\widetilde{B}_m) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\widetilde{\mu}(\widetilde{A}_n).$$

再利用 $\bar{\mu}$ 的单调性，我们有

$$\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\bar{\mu}(\widetilde{A}_n).$$

综上所述，$\bar{\mu}$ 是 μ 在 $\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$ 上的扩张.

我们设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合可加类，记

$$\mathscr{H}(\mathscr{C}) = \{\widetilde{E} \in \mathscr{F}(X); 存在 \widetilde{A} \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}} 使得 \widetilde{E} \subset \widetilde{A}\}$$

命题 3.3.3 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，则 $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}(\mathscr{C})$；当 $\widetilde{E} \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$时，$\widetilde{E}$ 的任何子集 $\widetilde{F} \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$；$\mathscr{H}(\mathscr{C})$是一 σ-可加类.

证明

(1) $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}(\mathscr{C})$是显然的.

(2) 当 $\widetilde{E} \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$时，存在 $\widetilde{A} \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$，使得 $\widetilde{E} \subset \widetilde{A}$. 对于任何 $\widetilde{F} \subset \widetilde{E}$，有 $\widetilde{F} \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$.

(3) 对于任何 $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2 \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$，存在 $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2 \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$ 使得 $\widetilde{E}_1 \subset \widetilde{A}_1, \widetilde{E}_2 \subset \widetilde{A}_2$，所以 $\widetilde{E}_1 \oplus \widetilde{E}_2 \subset \widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2$，根据命题 3.3.1 知 $\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A} \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$. 从而 $\widetilde{E}_1 \ominus \widetilde{E}_2 \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$. 由定理 3.1.3 我们只要证明 $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ 是右单调的，则 $\mathscr{H}(\mathscr{C})$就是 σ-可加类. 事实上，对于任何$\{\widetilde{E}_n\} \subset \mathscr{H}(\mathscr{C})$且 $\widetilde{E}_n \nearrow$，则存在$\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$，使得 $\widetilde{E}_n \subset \widetilde{A}_n$. 从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n.$$

再由命题 3.3.1，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$，即 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n \subset \mathscr{H}(\mathscr{C})$.

定义 3.3.1 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，在 $\mathscr{H}(\mathscr{C})$上作模糊值模糊集函数 μ^*：

$$\mu^*(\widetilde{A}) = \inf\{\overline{\mu}(\widetilde{B}); \widetilde{B} \in \mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}} 且 \widetilde{A} \subset \widetilde{B}\}, \widetilde{A} \in \mathscr{H}(\mathscr{C}),$$

称 μ^* 为由 μ 所引出的模糊值外测度.

命题 3.3.4 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，则对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$，有

$$\mu^*(\widetilde{A}) = \inf\{(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n); \widetilde{A}_n \in \mathscr{C}, \widetilde{A}_n \nearrow 且 \widetilde{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n\}.$$

证明 由 μ^*，$\overline{\mu}$ 以及 $\mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}$ 的定义可以立得.

定理 3.3.2 设 μ^* 是由 μ 所引出的模糊值外测度，则

(1) $\mu^* |_{\mathscr{C}^{+}_{\mathscr{A}}} = \overline{\mu}$；

(2) 对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$，$\mu^*(\widetilde{A}) \geqslant 0$；

(3) 对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，$\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$，则 $\mu^*(\widetilde{A})\leqslant\mu^*(\widetilde{B})$；

(4) 对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，

$$\mu^*(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})+\mu^*(\widetilde{A}\&\widetilde{B})\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\mu^*(\widetilde{B}),$$

特别地，$\mu(X)\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\mu^*(\widetilde{A}^c)$；

(5) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{H}(\mathscr{C})$ 且 $\widetilde{A}_n\nearrow$，则

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n).$$

证明

(1)(2)和(3)是显然的.

(4) 对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{A}}$ 使得

$$\widetilde{A}\subset\widetilde{G}_1,\widetilde{B}\subset\widetilde{G}_2,$$

且

$$\overline{\mu}(\widetilde{G}_1)\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\overline{\mu}(\widetilde{G}_2)\leqslant\mu^*(\widetilde{B})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

再由(1)(3)及定理 3.3.1，我们有

$$\begin{aligned}\mu^*(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})+\mu^*(\widetilde{A}\&\widetilde{B})&\leqslant\mu^*(\widetilde{G}_1\oplus\widetilde{G}_2)+\mu^*(\widetilde{G}_1\&\widetilde{G}_2)\\&=\overline{\mu}(\widetilde{G}_1)+\overline{\mu}(\widetilde{G}_2)\\&\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\mu^*(\widetilde{B})+\varepsilon.\end{aligned}$$

再由 ε 的任意性，

$$\mu^*(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})+\mu^*(\widetilde{A}\&\widetilde{B})\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\mu^*(\widetilde{B}).$$

(5) 由 μ^* 的单调性及命题 3.3.3 知

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n)\leqslant\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n).$$

另一方面，对于任意的 $\varepsilon>0$，及任何 $\widetilde{A}_n\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，存在 $\widetilde{G}_n\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{A}}$ 使得

$$\overline{\mu}(\widetilde{G}_n)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\text{ 及 }\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{A}},$$

所以

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\leqslant\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n)$$

$$=\overline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n)$$

$$=(\hat{\rho})\lim_{n\to\infty}\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{G}_i).$$

下面我们只要证明

$$\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{G}_i)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_n)+\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i},\qquad n=1,2,\cdots.$$

事实上，当 $n=1$ 时，上式显然成立.

设上式当 $n=m$ 时成立，经证当 $n=m+1$ 时成立. 由定理 3.3.1 的证明可知

$$\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{m+1}\widetilde{G}_i)+\overline{\mu}((\bigcup_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i)\cap\widetilde{G}_{m+1})=\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i)+\overline{\mu}(\widetilde{G}_{m+1}).$$

而由于$\{\widetilde{A}_n\}$是单调增的，所以

$$\widetilde{A}_m=\widetilde{A}_m\cap\widetilde{A}_{m+1}\subset\widetilde{G}_m\cap\widetilde{G}_{m+1}\subset(\bigcup_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i)\cap\widetilde{G}_{m+1}.$$

从而

$$\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{m+1}\widetilde{G}_i)+\mu^*(\widetilde{A}_m)\leqslant\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{m+1}\widetilde{G}_i)+\overline{\mu}((\bigcup_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i)\cap\widetilde{G}_{m+1})$$

$$=\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i)+\overline{\mu}(\widetilde{G}_{m+1})$$

$$\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_m)+\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}+\mu^*(\widetilde{A}_{m+1})+\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

于是，由定理 2.1.8

$$\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{m+1}\widetilde{G}_i)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_{m+1})+\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{2^i}.$$

由数学归纳法知，对于任何自然数 n 成立

$$\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{G}_i)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_n)+\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}.$$

故

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\overline{\mu}(\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{G}_i)$$

$$\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n)+\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性，

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n).$$

结合两方面，我们有

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n).$$

定理 3.3.3 设 μ^* 是由 μ 所引出的模糊值外测度，则对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{H}(\mathscr{C})$，有

$$\mu^*(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n).$$

证明 由命题 3.3.3 知 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，对于任何 $\widetilde{A}_n\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，存在 $\widetilde{B}_n\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{U}}$，使得 $\widetilde{A}_n\subset\widetilde{B}_n$ 且

$$\overline{\mu}(\widetilde{B}_n)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(\widetilde{B}_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n)+\varepsilon.$$

又由于 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\subset\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{U}}$，所以

$$\mu^*(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\leqslant\overline{\mu}(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(\widetilde{B}_n)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n)+\varepsilon.$$

故

$$\mu^*(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n).$$

定理 3.3.4 设 μ^* 是由 μ 所引出的模糊值外测度，如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{C}$，则对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，

$$\mu^*(\widetilde{F}) = \mu^*(\widetilde{F}\&\widetilde{E}) + \mu^*(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E})).$$

证明 由于 $\widetilde{F}=(\widetilde{F}\&\widetilde{E})\oplus(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E}))$，所以，由定理 3.3.2 知

$$\mu^*(\widetilde{F})\leqslant\mu^*(\widetilde{F}\&\widetilde{E}) + \mu^*(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E})).$$

另一方面，由命题 3.3.4，对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{C}$ 且 $\widetilde{E}_n\nearrow$ 以及 $\widetilde{F}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$，成立

$$\mu^*(\widetilde{F})+\varepsilon\geqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n).$$

令 $\widetilde{E}_n'=\widetilde{E}_n\&\widetilde{E}$，$\widetilde{E}_n''=\widetilde{E}_n\ominus\widetilde{E}_n\&\widetilde{E}$，显然 $\widetilde{E}_n'$，$\widetilde{E}_n''\in\mathscr{C}$，并且

$$\mu(\widetilde{E}_n) = \mu(\widetilde{E}_n') + \mu(\widetilde{E}_n''),\ n = 1,2,\cdots,$$

再由命题 3.1.2

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n' &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}_n\&\widetilde{E})\\ &=(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)\&\widetilde{E}\supset\widetilde{F}\&\widetilde{E};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n'' &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}_n\ominus(\widetilde{E}_n\&\widetilde{E}))\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}_n\ominus((\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)\&E))\\ &=\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n\ominus((\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)\&\widetilde{E})\supset\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E}).\end{aligned}$$

而且 $\widetilde{E}_n'\nearrow$，$\widetilde{E}_n''\nearrow$，从而

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n) &=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n') + (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n'')\\ &\geqslant\mu^*(\widetilde{F}\&\widetilde{E}) + \mu^*(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E})).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mu^*(\widetilde{F})+\varepsilon &\geqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)\\ &\geqslant\mu^*(\widetilde{F}\&\widetilde{E}) + \mu^*(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E})).\end{aligned}$$

再令 $\epsilon\to0$,结合两方面,我们得到

$$\mu^*(\widetilde{F})=\mu^*(\widetilde{F}\&\widetilde{E})+\mu^*(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E})).$$

推论 3.3.1 设 μ^* 是由 μ 所引出的模糊值外测度,如果存在 $\widetilde{B}_i\in\mathscr{C}$, $i\leqslant n$ 使得它们是互不相交的,且 $\widetilde{A}\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$,有 $\widetilde{A}=\bigoplus_{i=1}^{n}(\widetilde{A}\&\widetilde{B}_i)$,则

$$\mu^*(\widetilde{A})=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(\widetilde{A}\&\widetilde{B}_i).$$

定理 3.3.5 设 μ^* 是由 μ 所引出的模糊值外测度,记

$$\mathscr{S}_1=\{\widetilde{A}\in\mathscr{H}(\mathscr{C});\mu^*(\widetilde{A})+\mu^*(\widetilde{A}^c)=\mu(X)\},$$

则 $\mathscr{S}_1$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-可加类.

证明 由 $\mathscr{S}_1$ 的定义,显然 $\mathscr{S}_1$ 关于补是封闭的和 $X\in\mathscr{S}_1$. 设 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2\in\mathscr{S}_1$,则

$$\mu^*(\widetilde{A}_i)+\mu^*(\widetilde{A}_i^c)=\mu(X),\quad(i=1,2).$$

由定理 3.3.2,

$$\mu^*(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)+\mu^*(\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_1)+\mu^*(\widetilde{A}_2);\tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}&\mu^*((\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)^c)+\mu^*((\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)^c)\\&=\mu^*(\widetilde{A}_1^c\&\widetilde{A}_2^c)+\mu^*(\widetilde{A}_1^c\oplus\widetilde{A}_2^c)\\&\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_1^c)+\mu^*(\widetilde{A}_2^c).\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

所以

$$\begin{aligned}&\mu^*(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)+\mu^*(\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)\\&\quad+\mu^*((\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)^c)+\mu^*((\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)^c)\\&\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_1)+\mu^*(\widetilde{A}_2)+\mu^*(\widetilde{A}_1^c)+\mu^*(\widetilde{A}_2^c)\\&=2\mu(X).\end{aligned}$$

再由定理 3.3.2,

$$\mu(X)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)+\mu^*((\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)^c);$$

$$\mu(X)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)+\mu^*((\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)^c).$$

从而

$$\mu^*(\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2) + \mu^*((\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2)^c) + \mu^*(\widetilde{A}_1 \& \widetilde{A}_2) + \mu^*((\widetilde{A}_1 \& \widetilde{A}_2)^c) = 2\mu(X). \quad (3.3.3)$$

由定理 2.1.8,

$$\mu^*(\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2) + \mu^*((\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2)^c) = \mu(X)$$

及

$$\mu^*(\widetilde{A}_1 \& \widetilde{A}_2) + \mu^*((\widetilde{A}_1 \& \widetilde{A}_2)^c) = \mu(X).$$

故 $\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_1 \& \widetilde{A}_2 \in \mathscr{S}_1$,再由 $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} = \widetilde{A} \& \widetilde{B}^c$,则 $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} \in \mathscr{S}_1$,即 $\mathscr{S}_1$ 是一包含 $\mathscr{C}$ 的可加类. 下面我们为了证明 $\mathscr{S}_1$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-可加类,只要证明 $\mathscr{S}_1$ 是右单调的即可. 事实上,设 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{S}_1$,且 $\widetilde{A}_n \nearrow$,由命题 3.3.3 知 $\widetilde{A}_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$. 再由定理 3.3.2 知

$$\mu(X) \leqslant \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n) + \mu^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)^c)$$

且

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \mu^*(\widetilde{A}_n).$$

所以,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,当 $n \geqslant N$ 时

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n) \leqslant \mu^*(\widetilde{A}_n) + \varepsilon.$$

又由于 $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)^c \subset \widetilde{A}_n^c, n = 1, 2, \cdots$,所以

$$\mu^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)^c) \leqslant \mu(\widetilde{A}_n^c), \ n = 1, 2, \cdots,$$

从而,当 $n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned} &\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n) + \mu^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)^c) \\ \leqslant &\mu^*(\widetilde{A}_n) + \mu^*(\widetilde{A}_n^c) + \varepsilon \\ = &\mu(X) + \varepsilon. \end{aligned}$$

再由 ε 的任意性

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)+\mu^*((\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)^c)\leqslant\mu(X).$$

结合两方面,我们有

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)+\mu^*((\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)^c)=\mu(X).$$

即$\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{S}_1$,从而证明了$\mathscr{S}_1$是一个右单调的.

定义 3.3.2 称模糊集合$\widetilde{A}$是μ^*-可测的,如果它满足条件

$$\mu(X)=\mu^*(\widetilde{A})+\mu^*(\widetilde{A}^c).$$

定理 3.3.5 说明$\mathscr{H}(\mathscr{C})$中的μ^*-可测集的全体构成的集合是一个包含$\mathscr{C}$的σ-可加类.

定理 3.3.6 设μ^*是由模糊集合的可加类$\mathscr{C}$上的模糊值测度μ所引出的模糊值外测度,则μ^*是$\mathscr{S}_1$上的模糊值测度,进一步地,μ^*是μ的扩张.

证明 由定理 3.3.2 和定理 3.3.5,我们只要证明,对于任何$\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2\in\mathscr{S}_1$,有

$$\mu^*(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)+\mu^*(\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)=\mu^*(\widetilde{A}_1)+\mu^*(\widetilde{A}_2).$$

事实上,由(3.3.1)、(3.3.2)和(3.3.3)及定理 2.1.8,知

$$\mu^*(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)+\mu^*(\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2)=\mu^*(\widetilde{A}_1)+\mu^*(\widetilde{A}_2).$$

又因为$\mathscr{C}\subset\mathscr{S}_1$,而$\mathscr{S}_1$是一$\sigma$-可加类,所以,$\mathscr{C}_\sigma\subset\mathscr{S}_1$.又由定理 3.3.2,$\widetilde{\mu}\triangleq\mu^*|_{\mathscr{C}_\sigma}$是$\mu$在$\mathscr{C}_\sigma$上的扩张.

定理 3.3.7 设$\mathscr{C}$是模糊集合的可加类,μ是$\mathscr{C}$上的模糊值测度,$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$,则$\mu$可以唯一地扩张到$\mathscr{C}_\sigma$上.

证明 我们只需证明唯一性.设μ_1,μ_2都是μ在$\mathscr{C}_\sigma$上的扩张,令

$$\mathscr{M}=\{\widetilde{A};\widetilde{A}\in\mathscr{C}_\sigma\text{且}\mu_1(\widetilde{A})=\mu_2(\widetilde{A})\}.$$

显然,$\mathscr{M}\subset\mathscr{C}_\sigma$.下面我们证明$\mathscr{M}$是单调的.设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{M}$,$\{\widetilde{A}_n\}$是单调的(单调增或单调减),由$\mu_1$和$\mu_2$都是$\mathscr{C}_\sigma$上的模糊值测度,

所以根据连续性，我们有

$$\mu_i(\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu_i(\widetilde{A}_n) \quad (i=1,2).$$

又由于，对任何 n，

$$\mu_1(\widetilde{A}_n) = \mu_2(\widetilde{A}_n),$$

所以

$$\begin{aligned}\mu_1(\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_n) &= (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu_1(\widetilde{A}_n)\\ &= (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu_2(\widetilde{A}_n)\\ &= \mu_2(\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_n).\end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}_n \in \mathscr{M}$. 即 $\mathscr{M}$ 是一个单调的. 又由于 $\mathscr{C}\subset\mathscr{M}$，所以 $\mathscr{M}$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的单调类，根据定理 3.1.4 和定理 3.1.5，$\mathscr{C}_\sigma\subset\mathscr{M}$. 结合两方面，我们证明了 $\mathscr{C}_\sigma=\mathscr{M}$. 即 μ 在 $\mathscr{C}_\sigma$ 上的扩张是唯一的.

下面我们记

$$\mathscr{C}_{\mathscr{M}} = \{\widetilde{A};\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X), 存在\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}使得\widetilde{A}_n\searrow\widetilde{A}\},$$

其中 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类.

命题 3.3.5 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，则 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$ 等价于 $\widetilde{A}^c\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$.

证明 由 $\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$ 和 $\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$ 的构造立知.

命题 3.3.6 $\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$ 有如下的结构特征：

(1) $\mathscr{C}\subset\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$；

(2) 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$，则 $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$，$\widetilde{A}\&\widetilde{B}$，$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$，$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$；

(3) 如果 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$ 且 $\widetilde{A}_n\searrow\widetilde{A}$，则 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$，特别地，如果 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{M}}$.

证明 由命题 3.3.1 和命题 3.3.5 可得.

命题 3.3.7 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度及 $\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，对于 $\mathscr{C}$ 中任何单调减序列 $\{\widetilde{A}_n\}$，$\{\widetilde{B}_n\}$，如果 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n$，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n).$$

证明 因为 $\widetilde{B}_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n$，所以

$$\widetilde{B}_n \cup \widetilde{A}_m \searrow \widetilde{B}_n \cup \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \widetilde{A}_m \right) = \widetilde{B}_n,$$

于是由 μ 的单调性和定理 3.2.2，我们有

$$\mu(\widetilde{B}_n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n \cup \widetilde{A}_m) \geqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu(\widetilde{A}_m),$$

故

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n) \geqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n).$$

定理 3.3.8 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，μ 可以扩张到 $\mathscr{C}_{\mathscr{A}}^{-}$ 上.

证明 对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{C}_{\mathscr{A}}^{-}$，我们定义

$$\underline{\mu}(\widetilde{A}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n),$$

其中 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{C}$，且 $\widetilde{A}_n \searrow \widetilde{A}$. 我们能够类似于 $\overline{\mu}$ 证明 $\underline{\mu}$ 是 $\mathscr{C}_{\mathscr{A}}^{-}$ 上的一个模糊值测度，并且对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{C}$，有

$$\underline{\mu}(\widetilde{A}) = \mu(\widetilde{A}).$$

类似地，设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，记

$$\mathscr{K}(\mathscr{C}) = \{\widetilde{E} \in \mathscr{F}(X), 存在\ \widetilde{A} \in \mathscr{C}_{\mathscr{A}}^{-}\ 使得\ \widetilde{A} \subset \widetilde{E}\}.$$

命题 3.3.8 设 $\mathscr{C}$ 是一模糊集合的可加类，则 $\mathscr{C} \subset \mathscr{K}(\mathscr{C})$；当 $\widetilde{E} \in \mathscr{K}(\mathscr{C})$ 时；包含 $\widetilde{E}$ 的任何模糊集合 $\widetilde{F} \in \mathscr{K}(\mathscr{C})$；$\mathscr{K}(\mathscr{C})$ 是一 σ-可加类.

证明 类似于命题 3.3.3 可证.

定义 3.3.3 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，在 $\mathscr{K}(\mathscr{C})$ 上作模糊值模糊集函数 μ_*：

$$\mu_*(\widetilde{A}) = \sup\{\underline{\mu}(\widetilde{B}); \widetilde{B} \in \mathscr{C}_{\mathscr{A}}^{-}\ 且\ \widetilde{A} \supset \widetilde{B}\}, \widetilde{A} \in \mathscr{K}(\mathscr{C}),$$

称 μ_* 为由 μ 所引出的模糊值内测度.

命题 3.3.9 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度及 $\mu(\mathscr{C}) = \{\mu(\widetilde{A}); \widetilde{A} \in \mathscr{C}\} \in A^*$，则对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{K}(\mathscr{C})$，有

$$\mu_*(\widetilde{A}) = \sup\{(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n); \widetilde{A}_n \in \mathscr{C}, \widetilde{A}_n \searrow\ 且\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n \subset \widetilde{A}\}.$$

证明　显然.

定理 3.3.9　设 μ_* 是由 μ 所引出的模糊值内测度及 $\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，则

(1) $\mu_*|_{\mathscr{C}_{\mathscr{M}}^-}=\underline{\mu}$;

(2) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{K}(\mathscr{C}),\mu_*(\widetilde{A})\geqslant 0$;

(3) 对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{K}(\mathscr{C}),\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$，则 $\mu_*(\widetilde{A})\leqslant\mu_*(\widetilde{B})$;

(4) 对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{K}(\mathscr{C})$,

$$\mu_*(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})+\mu_*(\widetilde{A}\&\widetilde{B})\geqslant\mu_*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{B}),$$

特别地，$\mu(X)\geqslant\mu_*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{A}^c)$;

(5) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{K}(\mathscr{C})$ 且 $\widetilde{A}_n\searrow$ 和存在 n_0 使得 $\mu_*(\widetilde{A}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$，则

$$\mu_*(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\doteq(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu_*(\widetilde{A}_n).$$

证明　类似于定理 3.3.2 可证.

定理 3.3.10　设 μ_* 是由 μ 所引出的模糊值内测度，则对于 $\mathscr{K}(\mathscr{C})$ 中的任何不交列 $\{\widetilde{A}_n\}$，有

$$\mu_*(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(\widetilde{A}_n).$$

证明　由命题 3.3.8 知 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{K}(\mathscr{C})$，对于任何 $\widetilde{A}_n\in\mathscr{K}(\mathscr{C})$，存在 $\widetilde{B}_n\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}^-$ 使得 $\widetilde{B}_n\subset\widetilde{A}_n$ 且

$$\underline{\mu}(\widetilde{B}_n)\geqslant\mu_*(\widetilde{A}_n)-\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underline{\mu}(\widetilde{B}_n)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(\widetilde{A}_n)-\varepsilon.$$

又由于 $\{\widetilde{A}_n\}$ 是不交列，所以 $\{\widetilde{B}_n\}$ 也是不交的. 根据 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\supset\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\in\mathscr{C}_{\mathscr{M}}^-$，我们有

$$\mu_*\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\right)\geqslant\underline{\mu}\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\underline{\mu}(\widetilde{B}_n)$$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(\widetilde{A}_n)-\varepsilon.$$

故

$$\mu_*\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(\widetilde{A}_n).$$

定理 3.3.11 设 μ_*是由 μ 所引出的模糊值内测度，且 $\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{C}$，则对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{K}(\mathscr{C})$，

$$\mu_*(\widetilde{F})=\mu_*(\widetilde{F}\&\widetilde{E})+\mu_*(\widetilde{F}\ominus(\widetilde{F}\&\widetilde{E})).$$

证明 类似于定理 3.3.4 可证.

推论 3.3.2 设 μ_*是由 μ 所引出的模糊值内测度及 $\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，如果存在 $\widetilde{B}_i\in\mathscr{C}$，$i\leqslant n$，使得它们是互不相交的，且 $\widetilde{A}\in\mathscr{K}(\mathscr{C})$，有 $\widetilde{A}=\bigoplus_{i=1}^{n}(\widetilde{A}\&\widetilde{B}_i)$，则

$$\mu_*(\widetilde{A})=\sum_{i=1}^{n}\mu_*(\widetilde{A}\&\widetilde{B}_i).$$

定理 3.3.12 设 μ_*是由 μ 引出的模糊值内测度及 $\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，记

$$\mathscr{S}_2=\{\widetilde{A}\in\mathscr{K}(\mathscr{C});\mu_*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{A}^c)=\mu(X)\},$$

则 $\mathscr{S}_2$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-可加类.

证明 类似于定理 3.3.5 可证.

定义 3.3.4 称模糊集合 $\widetilde{A}$ 是 μ_*-可测的，如果它满足条件

$$\mu(X)=\mu_*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{A}^c).$$

定理 3.3.13 设 μ_*是由模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度 μ 所引出的模糊值内测度及 $\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，则 μ_* 是 $\mathscr{S}_2$ 上的模糊值测度，进一步地，μ_*是 μ 的扩张.

证明 类似于定理 3.3.6 可证.

定理 3.3.14 设 $\mathscr{C}$ 是模糊集合的可加类，μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊

值测度，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^*$，则 μ 可以唯一地扩张到 $\mathscr{C}_\sigma$ 上.

证明 类似于定理 3.3.7 可证.

命题 3.3.10 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，如果 $\widetilde{G}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{A}}$，则

$$\overline{\mu}(\widetilde{G})+\underline{\mu}(\widetilde{G}^c)=\mu(X).$$

证明 因为 $\widetilde{G}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{A}}$，所以存在 $\widetilde{G}_n\in\mathscr{C}$，$n=1,2,\cdots$ 使得 $\widetilde{G}_n\nearrow\widetilde{G}$，从而 $\widetilde{G}^c_n\in\mathscr{C}$，且 $\widetilde{G}^c_n\searrow\widetilde{G}^c$，所以

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(\widetilde{G})+\mu(\widetilde{G}^c)&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{G}_n)+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{G}^c_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}[\mu(\widetilde{G}_n)+\mu(\widetilde{G}^c_n)]\\&=\mu(X).\end{aligned}$$

同理，我们有

命题 3.3.11 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，如果 $\widetilde{G}\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{A}}$，则

$$\overline{\mu}(\widetilde{G}^c)+\underline{\mu}(\widetilde{G})=\mu(X).$$

命题 3.3.12 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，如果 $\widetilde{A}\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，则

$$\mu^*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{A}^c)=\mu(X).$$

证明 因为 $\widetilde{A}\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$，所以存在 $\widetilde{F}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{A}}$ 使得 $\widetilde{A}\subset\widetilde{F}$. 由命题 3.3.5 知 $\widetilde{F}^c\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{A}}$，且 $\widetilde{A}^c\supset\widetilde{F}^c$ 从而 $\widetilde{A}^c\in\mathscr{K}(\mathscr{C})$. 再由 μ^* 的定义，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\widetilde{G}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{A}}$ 使得

$$\overline{\mu}(\widetilde{G})\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\varepsilon.$$

又由 $\widetilde{G}\in\mathscr{C}^-_{\mathscr{A}}$，$\widetilde{G}^c\subset\widetilde{A}^c$，我们有

$$\mu(X)=\overline{\mu}(\widetilde{G})+\mu(\widetilde{G}^c)\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{A}^c)+\varepsilon.$$

从而

$$\mu(X)\leqslant\mu^*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{A}^c).$$

类似地，我们可以证明

$$\mu(X) \geqslant \mu^*(\widetilde{A}) + \mu_*(\widetilde{A}^c).$$

故

$$\mu(X) = \mu^*(\widetilde{A}) + \mu_*(\widetilde{A}^c).$$

命题 3.3.13 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，则 $\widetilde{A}\in\mathscr{S}_1$ 的充分必要条件是

$$\mu^*(\widetilde{A}) = \mu_*(A).$$

证明 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{S}_1$，则 $\mu^*(\widetilde{A})+\mu^*(\widetilde{A}^c)=\mu(X)$. 由命题 3.3.12 知 $\mu^*(\widetilde{A})+\mu_*(\widetilde{A}^c)=\mu(X)$. 再由定理 2.1.8 我们有

$$\mu^*(\widetilde{A}) = \mu_*(\widetilde{A}).$$

反之，设 $\mu^*(\widetilde{A})=\mu_*(\widetilde{A})$，由命题 3.3.12，我们有

$$\mu(X) = \mu^*(\widetilde{A}^c) + \mu_*(\widetilde{A}) = \mu^*(\widetilde{A}^c) + \mu^*(\widetilde{A}).$$

即 $\widetilde{A}\in\mathscr{S}_1$.

类似地，我们有

命题 3.3.14 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，则 $\widetilde{A}\in\mathscr{S}_2$ 的充分必要条件是 $\mu_*(\widetilde{A})=\mu^*(\widetilde{A})$.

结合命题 3.3.13 和命题 3.3.14，我们有

定理 3.3.15 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，则模糊集合是 μ^*-可测的当且仅当它是 μ_*-可测的.

定理 3.3.15 说明 $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$ 表示的是同一个模糊集合的类，我们记为 $\mathscr{S}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \{\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X);\mu^*(\widetilde{A}) + \mu^*(\widetilde{A}^c) = \mu(X)\}\\ &= \{\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X);\mu_*(\widetilde{A}) + \mu_*(\widetilde{A}^c) = \mu(X)\}\\ &= \{\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X);\mu_*(\widetilde{A}) = \mu^*(\widetilde{A})\}.\end{aligned}$$

命题 3.3.15 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，$\mu^*(\widetilde{E})=0$，则 $\widetilde{E}\in\mathscr{S}$.

证明 由命题 3.3.12 和命题 3.3.4 及定理 2.1.8，

$$\mu_*(\widetilde{E}) \leqslant \mu^*(\widetilde{E}) = 0.$$

于是

$$\mu_*(\widetilde{E}) = \mu^*(\widetilde{E}) = 0.$$

即 $\widetilde{E}\in\mathscr{S}$.

命题 3.3.15 说明 μ^* 值为零的模糊集，即是 μ^*-可测的，又是 μ_*-可测的.

定义 3.3.5 设 μ 是模糊集合的类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，称 μ 是完全的，如果对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{C}$，$\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$ 且 $\mu(\widetilde{E})=0$ 有 $\widetilde{F}\in\mathscr{C}$.

推论 3.3.3 μ^* 和 μ_* 在 $\mathscr{S}$ 上都是完全的.

命题 3.3.16 设 μ_1，μ_2 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的两个模糊值测度，且 $\mu_1(\widetilde{A})\leqslant\mu_2(\widetilde{A})$，$\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，则

$$\overline{\mu}_1(\widetilde{A}) \leqslant \overline{\mu}_2(\widetilde{A}), \quad \widetilde{A} \in \mathscr{C}^+_{\mathscr{M}},$$

进一步地，

$$\mu_1^*(\widetilde{A}) \leqslant \mu_2^*(\widetilde{A}), \quad \widetilde{A} \in \mathscr{H}(\mathscr{C}).$$

证明 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}}$，存在 $\widetilde{A}_n\in\mathscr{C}$，$n=1,2,\cdots$ 使得 $\overline{\mu}_1(\widetilde{A})=(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu_1(\widetilde{A}_n)$，$\overline{\mu}_2(\widetilde{A})=(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu_2(\widetilde{A}_n)$. 因为对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，$\mu_1(\widetilde{B})\leqslant\mu_2(\widetilde{B})$，所以

$$\begin{aligned}\overline{\mu}_1(\widetilde{A}) &= (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu_1(\widetilde{A}_n)\\ &\leqslant (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu_2(\widetilde{A}_n) = \overline{\mu}_2(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

进一步地，对于 $\widetilde{A}\in\mathscr{H}(\mathscr{C})$

$$\begin{aligned}\mu_1^*(\widetilde{A}) &= \inf\{\overline{\mu}_1(\widetilde{G});\widetilde{G}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}},\widetilde{A}\subset\widetilde{G}\}\\ &\leqslant \inf\{\overline{\mu}_2(\widetilde{G});\widetilde{G}\in\mathscr{C}^+_{\mathscr{M}},\widetilde{A}\subset\widetilde{G}\}\\ &= \mu_2^*(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

类似地，我们有

命题 3.3.17 设 μ_1，μ_2 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的两个模糊值测度，且 $\mu_1(\widetilde{A})\leqslant\mu_2(\widetilde{A})$，$\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，则

$$\underline{\mu}_1(\widetilde{A}) \leqslant \underline{\mu}_2(\widetilde{A}), \widetilde{A} \in \mathscr{C}^-_{\mathscr{M}},$$

进一步地，

$$\mu_{1*}(\widetilde{A}) \leqslant \mu_{2*}(\widetilde{A}), \widetilde{A} \in \mathscr{K}(\mathscr{C}).$$

定理 3.3.16 设 μ 是模糊集合可加类 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\mu(\mathscr{C}) = \{\mu(\widetilde{A}); \widetilde{A} \in \mathscr{C}\} \in A^*$，则对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{C}_\sigma$，我们有

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\widetilde{\mu_\lambda^-}(\widetilde{A}), \widetilde{\mu_\lambda^+}(\widetilde{A})].$$

证明 由定理 3.3.7，对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{C}_\sigma$，

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \inf\{(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{G}_n); \widetilde{G}_n \in \mathscr{C}, \widetilde{G}_n \nearrow \text{且 } \widetilde{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n\}.$$

由模糊集合的分解定理

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) =$$

$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\inf_{\widetilde{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n, \widetilde{G}_n \in \mathscr{C}, \widetilde{G}_n \uparrow} \lim_{n\to\infty} \mu_\lambda^-(\widetilde{G}_n), \inf_{\widetilde{A} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n, \widetilde{G}_n \in \mathscr{C}, \widetilde{G}_n \uparrow} \lim_{n\to\infty} \mu_\lambda^+(\widetilde{G}_n)]$$

再由定理 3.2.5 和定理 3.3.7 实值测度 μ_λ^-，μ_λ^+，可以唯一地扩张到 $\mathscr{C}_\sigma$ 上. 从而

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\widetilde{\mu_\lambda^-}(\widetilde{A}), \widetilde{\mu_\lambda^+}(\widetilde{A})].$$

此定理说明模糊集合上的模糊值测度的扩张可以通过模糊集合上的实值测度扩张来得到.

第 4 章　模糊值可测函数

4.1　模糊值可测函数

4.1.1　模糊集合的代数

设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，我们称 $\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$ 为 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 的积，其中 $\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$ 定义为

$$(\widetilde{A}\cdot\widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x),\quad x\in X.$$

注 4.1.1　此处的两个模糊集合的积就是例 1.3.1 中 $T=T_1$ 时的模交.

命题 4.1.1

(a) 如果 $\{\widetilde{A}_i\}$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 中的不交模糊集的至多可数类，则对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，有

$$\widetilde{A}\cdot(\bigoplus_i\widetilde{A}_i)=\bigoplus_i(\widetilde{A}\cdot\widetilde{A}_i);$$

(b) 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}\in\mathscr{F}(X)$，则

$$\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}^c=\widetilde{A}\ominus\widetilde{A}\cdot\widetilde{B},\widetilde{A}\cdot(\widetilde{B}\ominus\widetilde{C})=(\widetilde{A}\cdot\widetilde{B})\ominus(\widetilde{A}\cdot\widetilde{C}).$$

证明　显然.

注 4.1.2　命题 4.1.1(a)中要求 $\{\widetilde{A}_i\}$ 是不交列的条件是不可缺少的.

定义 4.1.1　设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$，如果 $\mathscr{C}$ 是可加类且对它的元素的积封闭，则称 $\mathscr{C}$ 是一个模糊集合代数；如果 $\mathscr{C}$ 是一 σ-可加类且对它的元素的积封闭，则称 $\mathscr{C}$ 是一个模糊集合 σ-代数.

命题 4.1.2　设 $\mathscr{C}_i\subset\mathscr{F}(X)$，$i\in I$ 是一族模糊集合代数（分别地，模糊集合 σ-代数），则 $\bigcap_{i\in I}\mathscr{C}_i$ 仍然是一个模糊集合代数（分别

地，模糊集合 σ-代数），其中 I 是任意指标集.

证明　显然.

定理 4.1.1　设 $\mathscr{G}$ 是任意一个模糊集合类，则存在唯一的最小模糊集合代数 $\mathscr{G}_a$（分别地，σ-代数 $\mathscr{G}_\sigma$），使得 $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_a$（分别地，$\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_\sigma$），称 $\mathscr{G}_a$（分别地，$\mathscr{G}_\sigma$）是由 $\mathscr{G}$ 生成的模糊集合代数（分别地，σ-代数）.

证明　显然.

定理 4.1.2　设 $\mathscr{G}_0\subset\mathscr{F}(X)$，$\mathscr{G}=\mathscr{G}_0\cup\{\varnothing,X\}$，则

① $\mathscr{G}_a$ 由下列形式的模糊集合的有限和和有限积的全体以及它们的补组成：

$$\bigominus_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k(i)}(\tilde{A}_j^i\bigcirc\tilde{B}_j^i)\quad 和\quad \prod_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{k(i)}(\tilde{A}_j^i\ominus\tilde{B}_j^i).\qquad(4.1)$$

其中 $\tilde{A}_j^i,\tilde{B}_j^i\in\mathscr{G}$；

② $\mathscr{G}_\sigma$ 由 $\mathscr{G}_a$ 中元素的可数交的可数并以及可数交的可数并的补组成.

证明　类似定理 3.1.2 可证.

定义 4.1.2　设 $\mathscr{G}$ 是一个 X 上模糊集合代数，μ 是定义上 $\mathscr{G}$ 上的一个模糊值测度，我们称 $(X,\mathscr{G})$ 是可测空间，称 $(X,\mathscr{G},\mu)$ 为模糊值测度空间.

注 4.1.3　显然，当 $\mathscr{G}\subset\mathscr{P}(X)$ 和 $\mu(\mathscr{G})=\{\mu(\tilde{A});\tilde{A}\in\mathscr{G}\}\in R$ 时，$(X,\mathscr{G},\mu)$ 是经典的测度空间.

定义 4.1.3

① 设 $C\in[0,1]$，由下式

$$\tilde{C}(x)\equiv C,x\in X$$

定义的模糊集合 $\tilde{C}$ 叫做常模糊集合；

② 如果对于任何 $C\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，有 $\tilde{C}\in\mathscr{G}$，则称 $\mathscr{G}$ 是包含常模糊集合的.

命题 4.1.3 如果 $\mathscr{G}$ 是包含常模糊集的 σ-代数，则 $\widetilde{C}\in\mathscr{G}$，对于任何 $C\in[0,1]$.

证明 因为 $\mathscr{G}$ 是 σ-可加类，所以 $\widetilde{1}=X\in\mathscr{G}$. 又因为 $\widetilde{C}_n=\widetilde{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}\in\mathscr{G}$，$n>2$，从而 $\widetilde{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{C}_n\in\mathscr{G}$. 即对于任何 $C\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\widetilde{C}\in\mathscr{G}$，再由 $\mathscr{G}$ 是 σ-可加类，所以，对于任何 $C\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，$\widetilde{C}=(\widetilde{C}^c)^c\in\mathscr{G}$.

命题 4.1.4 设 $\underline{A}=(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\widetilde{A}_3,\cdots,\widetilde{A}_n)$，$\underline{B}=(\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,\cdots,\widetilde{B}_m)$ 为 X 的两个有限模糊划分，则 $\underline{A}\cdot\underline{B}=\{\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j;i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m\}$ 也是 X 的一个有限模糊划分，进一步地，如果 $\underline{A},\underline{B}\in\mathscr{G}$，则 $\underline{A}\cdot\underline{B}\in\mathscr{G}$.

证明 显然.

4.1.2 模糊值可测函数

定义 4.1.4 一个实值简单函数是一个序偶 $s=(\underline{A},\underline{a})$，其中 $\underline{A}=(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$ 是 X 的一个有限模糊划分，$\underline{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$，实数 $s(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\widetilde{A}_i(x)$ 叫做 s 在 $x\in X$ 的值，函数 $x\to s(x)$ 叫做 s 的值函数.

定义 4.1.5 设 $(X,\mathscr{G})$ 是可测空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，函数 $f:X\to[-\infty,+\infty]$ 称为 $\widetilde{E}$ 上关于 $(X,\mathscr{G})$ 的实值可测函数，简称 $\widetilde{E}$ 上可测函数，如果对于任何的 $\alpha\in[-\infty,+\infty]$ 有 $\widetilde{E}\cap\chi_{F_\alpha}\in\mathscr{G}$，其中 $F_\alpha=\{x;f(x)\geqslant\alpha\}$.

注 4.1.4 由于 $F_{-\infty}=X$，所以当 f 在 $\widetilde{E}$ 上可测时，$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$.

定义 4.1.6 设 $(X,\mathscr{G})$ 是可测空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，称模糊值函数 $\widetilde{f}:X\to\mathscr{F}^*(R)$ 在 $\widetilde{E}$ 上关于 $(X,\mathscr{G})$ 是可测的，简称 $\widetilde{E}$ 上可测的，

如果对于任何的 $\lambda\in(0,1]$ $f_\lambda^-(x)$，$f_\lambda^+(x)$都是 $\tilde{E}$ 上实值可测函数，其中

$$\tilde{f}(x)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[(f(x))_\lambda^-,(f(x))_\lambda^+]\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[f_\lambda^-(x),f_\lambda^+(x)].$$

我们用 $M(\tilde{E})$记 $\tilde{E}$ 上实值可测函数全体构成的集合，特别是当 $\tilde{E}=X$ 时，简记为 M；用 $\tilde{M}(\tilde{E})$记 $\tilde{E}$ 上模糊值可测函数全体构成的集合，特别是当 $\tilde{E}=X$ 时，简记为 $\tilde{M}$.

注 4.1.5 $M(\tilde{E})\subset\tilde{M}(\tilde{E})$.

定理 4.1.3 $\tilde{f}\in\tilde{M}(\tilde{E})$的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$和 $\alpha\in[-\infty,+\infty]$有

$$\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}\in\mathscr{G},\quad \tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}\in\mathscr{G},$$

$$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda^-(x)=-\infty\}}\in\mathscr{G},\quad \tilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda^+(x)=-\infty\}}\in\mathscr{G},$$

其中

$$F_{\lambda,\alpha}^-=\{x;f_\lambda^-(x)>\alpha\},F_{\lambda,\alpha}^+=\{x;f_\lambda^+(x)>\alpha\}.$$

证明 必要性. 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，当 $\alpha=\infty$时，由于 $F_{\lambda,\infty}^-=\{x;f_\lambda^-(x)>+\infty\}=\varnothing$，所以，$\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\infty}^-}=\varnothing\in\mathscr{G}$；当 $-\infty<\alpha<+\infty$时，由于

$$\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha+\frac{1}{n}}^-}),$$

所以，由 $f_\lambda^-(x)$是实值可测的知，$\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}\in\mathscr{G}$；当 $\alpha=-\infty$时，由于

$$\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,-\infty}^-}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,-n}}),$$

所以，$\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,-\infty}^-}\in\mathscr{G}$. 又由于 $\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,-\infty}^-}\in\mathscr{G}$，及

$$\tilde{E}=(\tilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda^-(x)=-\infty\}})\oplus(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,-\infty}}),$$

于是

$$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda^-(x)=-\infty\}}=\tilde{E}\ominus(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,-\infty}^-})\in\mathscr{G}.$$

同理，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，我们可以证明 $\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}\in\mathscr{G}$和 $\tilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda^+(x)=-\infty\}}\in\mathscr{G}$.

充分性. 我们只要证明对于任何 $\lambda\in(0,1]$, f_λ^-, $f_\lambda^+\in M(\widetilde{E})$ 即可. 事实上, 对于任何 $\lambda\in(0,1]$, 当 $\alpha=-\infty$ 时, 由于 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=-\infty\}}\in\mathscr{G}$ 和 $\widetilde{E}\cap\chi_{\overline{F^-_{\lambda,-\infty}}}\in\mathscr{G}$, 以及 $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,-\infty}}=\widetilde{E}=(\widetilde{E}\cap\chi_{\overline{F^-_{\lambda,-\infty}}})\oplus(\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=-\infty\}})$, 所以 $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,-\infty}}\in\mathscr{G}$; 当 $-\infty<\alpha<+\infty$ 时, 由于

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}\cap\chi_{\overline{F^-_{\lambda,\alpha-\frac{1}{n}}}}),$$

所以, $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}\in\mathscr{G}$; 当 $\alpha=\infty$ 时, 由于

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\infty}}=\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=+\infty\}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,n}}),$$

所以, $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\infty}}\in\mathscr{G}$, 从而我们证明了对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $f_\lambda^-\in M(\widetilde{E})$, 同理可证对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $f_\lambda^+\in M(\widetilde{E})$, 故 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

定理 4.1.4 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$ 的充分必要条件是对于任何的 $\lambda\in(0,1]$, $\alpha,\beta\in[-\infty,+\infty]$, 有

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=\infty\}}\in\mathscr{G},\ \widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^+(x)=\infty\}}\in\mathscr{G},$$

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:\alpha\leqslant f_\lambda^-(x)<\beta\}}\in\mathscr{G},\ \widetilde{E}\cap\chi_{\{x:\alpha\leqslant f_\lambda^+(x)<\beta\}}\in\mathscr{G}.$$

证明 必要性. 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=\infty\}}=\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\infty}},$$

所以 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=\infty\}}\in\mathscr{G}$, 又由于对于任何 $\alpha,\beta\in[-\infty,+\infty]$, $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}$, $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\beta}}\in\mathscr{G}$, 以及 $\widetilde{E}\cap\chi^c_{F^-_{\lambda,\beta}}=\widetilde{E}\ominus\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\beta}}$ 和

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:\alpha\leqslant f_\lambda^-(x)<\beta\}}=(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\cap(\widetilde{E}\cap\chi^c_{F^-_{\lambda,\beta}}),$$

所以, $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:\alpha\leqslant f_\lambda^-(x)<\beta\}}\in\mathscr{G}$.

同理, 我们可以证明, 对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $\alpha,\beta\in[-\infty,+\infty]$, $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:\alpha\leqslant f_\lambda^+(x)<\beta\}}\in\mathscr{G}$ 和 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^+(x)=\infty\}}\in\mathscr{G}$.

充分性. 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $\alpha\in[-\infty,\infty)$,

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}=(\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:\alpha\leqslant f_\lambda^-(x)<\infty\}})\oplus(\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=\infty\}}),$$

所以, $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}\in\mathscr{G}$; 又由于 $\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\infty}}=\widetilde{E}\cap\chi_{\{x:f_\lambda^-(x)=\infty\}}$, 所以 $\widetilde{E}\cap$

$\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}\in\mathscr{G}$. 从而我们证明了对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$f^-_\lambda\in M(\widetilde{E})$，同理可证对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$f^+_\lambda\in M(\widetilde{E})$，从而 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

定理 4.1.5 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，有

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant\alpha\}}\in\mathscr{G},\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^+_\lambda(x)\leqslant\alpha\}}\in\mathscr{G}.$$

证明 必要性. 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$，当 $\alpha=-\infty$时，$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant-\infty\}}=\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)=-\infty\}}$，由定理 4.1.3 知，$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant-\infty\}}\in\mathscr{G}$；当$-\infty<\alpha<+\infty$时，有

$$\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant\alpha\}=\{x;f(x)>\alpha\}^c,$$

所以

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant\alpha\}}=\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\bar{\alpha}}}=\widetilde{E}\ominus\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\bar{\alpha}}},$$

再由定理 4.1.3 知，$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant\alpha\}}\in\mathscr{G}$. 当 $\alpha=+\infty$时，由于 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda(x)\leqslant+\infty\}}=\widetilde{E}$，所以，$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda(x)\leqslant+\infty\}}\in\mathscr{G}$. 同理可证对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，有

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^+_\lambda(x)\leqslant\alpha\}}\in\mathscr{G}.$$

充分性. 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$，当 $\alpha=-\infty$时，$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)=-\infty\}}=\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant-\infty\}}\in\mathscr{G}$，和当 $\alpha>-\infty$时，$\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\bar{\alpha}}}=\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)\leqslant\alpha\}}\in\mathscr{G}$，以及 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^+_\lambda(x)=-\infty\}}\in\mathscr{G}$，$\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\bar{\alpha}}}\in\mathscr{G}$，所以 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

类似可以证明.

定理 4.1.6 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，有

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^-_\lambda(x)<\alpha\}}\in\mathscr{G},\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^+_\lambda(x)<\alpha\}}\in\mathscr{G},$$

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f_\lambda(x)=\infty\}}\in\mathscr{G},\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f^+_\lambda(x)=\infty\}}\in\mathscr{G}.$$

定理 4.1.7 设$(X,\mathscr{G})$是可测空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，$\widetilde{f}:X\to$

$\mathscr{F}^*(R)$的函数，则

(1) 如果 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$，且 $\widetilde{E}_1$ 是 $\widetilde{E}$ 的可测子集，则 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_1)$；

(2) 设 $\widetilde{E}_1\&\widetilde{E}_2=\varnothing$，$\widetilde{E}=\widetilde{E}_1\oplus\widetilde{E}_2$，$\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2\in\mathscr{G}$，则 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$的充分必要条件是 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_1)$且 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_2)$.

证明

(1) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，由于

$$\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}=(\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E})\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}=\widetilde{E}_1\cap(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})$$

和

$$\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}=(\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E})\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}=\widetilde{E}_1\cap(\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}),$$

而 $\widetilde{E}_1,\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}},\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}\in\mathscr{G}$，所以，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，$\widetilde{E}_1\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}\in\mathscr{G}$，$\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}\in\mathscr{G}$，从而 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_1)$.

(2) 设 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$，由(1)知 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_1)$和 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_2)$. 反之，如果 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_1)$且 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E}_2)$，由于对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}=(\widetilde{E}_1\oplus\widetilde{E}_2)\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}=(\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\oplus(\widetilde{E}_2\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}});$$

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}=(\widetilde{E}_1\oplus\widetilde{E}_2)\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}=(\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\oplus(\widetilde{E}_2\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}),$$

所以，$\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}},\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}\in\mathscr{G}$，即 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

定义 4.1.7 设 $\widetilde{f}_n: X\to\mathscr{F}^*(R)$，$n=1,2,3$，如果对于任何 $x\in X$，有

$$\widetilde{f}_3(x)=\widetilde{f}_1(x)+\widetilde{f}_2(x),$$

则称 $\widetilde{f}_3$ 为 $\widetilde{f}_1$ 与 $\widetilde{f}_2$ 的和，记为 $\widetilde{f}_3=\widetilde{f}_1+\widetilde{f}_2$，如果对于任何 $x\in X$，有

$$\widetilde{f}_3(x)=\max(\widetilde{f}_1(x),\widetilde{f}_2(x)),$$

$$(\text{分别地},\widetilde{f}_3(x)=\min(\widetilde{f}_1(x),\widetilde{f}_2(x)),$$

则称 $\tilde{f}_3$ 为 $\tilde{f}_1$ 与 $\tilde{f}_2$ 的极大元(分别地,极小元),记为 $\tilde{f}_3=\max(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)$(分别地,$\tilde{f}_3=\min(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)$).

定义 4.1.8 设 $\tilde{f}_n: X\to\mathscr{F}^*(R)$,$n=1,2$,如果对于任何 $x\in X$,有

$$\tilde{f}_1(x)\leqslant\tilde{f}_2(x),$$

则称 $\tilde{f}_1$ 小于等于 $\tilde{f}_2$,记为 $\tilde{f}_1\leqslant\tilde{f}_2$.

定理 4.1.8 设 $\tilde{f},\tilde{g}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$,则

(1) 对于任何的 $\tilde{\alpha}\in\mathscr{F}^*(R)$,$\tilde{\alpha}\geqslant 0$ 或 $\tilde{\alpha}\leqslant 0$,如果 $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}$ 有意义,则 $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$;

(2) 如果 $\tilde{f}+\tilde{g}$ 有意义,则 $\tilde{f}+\tilde{g}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$;

(3) $\max(\tilde{f},\tilde{g}),\min(\tilde{f},\tilde{g})\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$;

(4) $\tilde{\rho}(\tilde{f},\tilde{g})\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

证明 (1) 当 $\tilde{\alpha}\geqslant 0$ 时,当存在 $\lambda_0\in(0,1]$ 使得 $\alpha_{\lambda_0}^-=0$ 时,$\alpha_{\lambda_0}^-\cdot f_{\lambda_0}^-(x)\equiv 0$,$\forall\, x\in X$,所以,$\alpha_{\lambda_0}^-\cdot f_{\lambda_0}^-\in M(\widetilde{E})$;如果 $\lambda_0\in(0,1]$ 使得 $\alpha_{\lambda_0}^->0$,则对于任何 $c\in[-\infty,+\infty]$,

$$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;\alpha_{\lambda_0}^-\cdot f_{\lambda_0}(x)\geqslant c\}}=\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f_{\lambda_0}^-(x)\geqslant c/\alpha_{\lambda_0}\}},$$

而 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;f_{\lambda_0}(x)\geqslant c/\alpha_{\lambda_0}\}}\in\mathscr{G}$,所以,$\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;\alpha_{\lambda_0}^-\cdot f_{\lambda_0}^-(x)\geqslant c\}}\in\mathscr{G}$,因此,$\alpha_{\lambda_0}\cdot f_{\lambda_0}^-\in M(\widetilde{E})$,同理可证 $\alpha_\lambda^+\cdot f_\lambda^+\in M(\widetilde{E})$,$\forall\,\lambda\in(0,1]$. 故 $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$. 当 $\tilde{\alpha}\leqslant 0$ 时,同理可以证明 $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

(2) 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是有理数的全体,对于任何的 $\lambda\in(0,1]$,$\alpha\in[-\infty,+\infty]$,有下面的等式.

$$\{x;[(\tilde{f}+\tilde{g})(x)]_\lambda^->\alpha\}=\{x;f_\lambda^-(x)+g_\lambda^-(x)>\alpha\}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x;f_\lambda^-(x)>r_i\}\cap\{x;g_\lambda^-(x)>\alpha-r_i\}),$$

从而

$$\widetilde{E} \cap \chi_{\{x;[(\widetilde{f}+\widetilde{g})(x)]_\lambda^- > \alpha\}} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,r_i}}) \cap (\widetilde{E} \cap \chi_{G^-_{\lambda,\overline{\alpha-r_i}}})],$$

故 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;[(\widetilde{f}+\widetilde{g})(x)]_\lambda > \alpha\}} \in \mathscr{G}$. 又由于

$$\{x;[(\widetilde{f}+\widetilde{g})(x)]_\lambda = -\infty\} = \{x;f_\lambda(x) + g_\lambda(x) = -\infty\}$$

$$= \{x;f_\lambda^-(x) = -\infty\} \cup \{x;g_\lambda(x) = -\infty\},$$

从而

$$\widetilde{E} \cap \chi_{\{x;[(\widetilde{f}+\widetilde{g})(x)]_\lambda^- = -\infty\}}$$

$$= (\widetilde{E} \cap \chi_{\{x;f_\lambda^-(x)=-\infty\}}) \cup (\widetilde{E} \cap \chi_{\{x;g_\lambda^-(x)=-\infty\}}).$$

故 $\widetilde{E}\cap\chi_{\{x;[(\widetilde{f}+\widetilde{g})(x)]_\lambda^- = -\infty\}} \in \mathscr{G}$,即 $(\widetilde{f}+\widetilde{g})_\lambda^- \in M(\widetilde{E})$,同理可证,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$(\widetilde{f}+\widetilde{g})_\lambda^+ \in M(\widetilde{E})$,这样,我们就证明了 $\widetilde{f}+\widetilde{g}\in \widetilde{M}(\widetilde{E})$.

(3) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$\alpha\in[-\infty,+\infty]$,由于

$$\widetilde{E} \cap \chi_{\{x;\max(f_\lambda^-(x),g_\lambda^-(x))\geqslant\alpha\}}$$

$$= (\widetilde{E} \cap \chi_{\{x;f_\lambda^-(x)\geqslant\alpha\}}) \cup (\widetilde{E} \cap \chi_{\{x;g_\lambda^-(x)\geqslant\alpha\}}).$$

所以,$\max(f_\lambda^-,g_\lambda^-)\in M(\widetilde{E})$,同理可以证明,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$\max(f_\lambda^+,g_\lambda^+)\in M(\widetilde{E})$,故 $\max(\widetilde{f},\widetilde{g})\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

类似可以证明 $\min(\widetilde{f},\widetilde{g})\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

(4) 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$|f_\lambda^-|=\max(f_\lambda^-,-f_\lambda^-)\in M(\widetilde{E})$ 及 $|f_\lambda^+|=\max(f_\lambda^+,-f_\lambda^+)\in M(\widetilde{E})$ 和 $\widetilde{\rho}$ 的定义知 $\widetilde{\rho}(\widetilde{f},\widetilde{g})\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$.

定义 4.1.9 设 $\widetilde{f}_n: X\to\mathscr{F}^*(R)$,$n=0,1,2,\cdots$,如果对于任何 $x\in E\subset X$,$\widetilde{f}_0(x)=\sup\limits_{n\geqslant1}\widetilde{f}_n(x)$(分别地,$\widetilde{f}_0(x)=\inf\limits_{n\geqslant1}\widetilde{f}_n(x)$),则称 $\widetilde{f}_0$ 为 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 E 上的上确界(分别地,下确界),记为 $\widetilde{f}_0=\sup\limits_{n\geqslant1}\widetilde{f}_n$(分别地,$\widetilde{f}_0=\inf\limits_{n\geqslant1}\widetilde{f}_n$). 如果对于任何 $x\in E\subset X$,$\widetilde{f}_0(x)=(\widetilde{\rho})\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\widetilde{f}_n(x)$(分别地,$\widetilde{f}_0(x)=(\widetilde{\rho})\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\widetilde{f}_n(x)$),则称 $\widetilde{f}_0$ 为 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 E 上的上极限,

记为 $\tilde{f}_0=(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n$（分别地，下极限，记为 $\tilde{f}_0=(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n$）.

定理 4.1.9 设 $\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{E})$，如果 $\sup_{n\geq 1}\tilde{f}_n$，$\inf_{n\geq 1}\tilde{f}_n$，$(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n$，$(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n$ 存在，则它们都是 $\tilde{E}$ 上可测的.

证明 先证 $\tilde{F}=\sup_{n\geq 1}\tilde{f}_n\in\tilde{M}(\tilde{E})$. 设 $\tilde{F}_n=\max(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\cdots,\tilde{f}_n)$，则由定理 4.1.8 知 $\tilde{F}_n\in\tilde{M}(\tilde{E})$，从而对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$F_{n_\lambda}^-=\max(f_{1_\lambda}^-,f_{2_\lambda}^-,\cdots,f_{n_\lambda}^-)\in M(\tilde{E})$ 和 $F_{n_\lambda}^+=\max(f_{1_\lambda}^+,f_{2_\lambda}^+,\cdots,f_{n_\lambda}^+)\in M(\tilde{E})$，又因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$F_\lambda^-(x)=\lim_{n\to\infty}F_{n_\lambda}^-(x),$$

$$F_\lambda^+(x)=\lim_{n\to\infty}F_{n_\lambda}^+(x),$$

以及 $\{F_{n_\lambda}^-(x)\}$ 和 $\{F_{n_\lambda}^+(x)\}$ 是单调增加实函数序列，所以，对于任何 $\alpha\in[-\infty,+\infty]$，

$$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;F_\lambda^-(x)>\alpha\}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{E}\cap\chi_{\{x;F_{n_\lambda}^-(x)>\alpha\}}),$$

从而，$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;F_\lambda^-(x)>\alpha\}}\in\mathscr{G}$，$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;F_\lambda^-(x)=-\infty\}}\in\mathscr{G}$ 是显然的，故 $F_\lambda\in M(\tilde{E})$，同理，$F_\lambda^+\in M(\tilde{E})$，这样我们就证明了 $\tilde{F}\in\tilde{M}(\tilde{E})$.

同理可证 $\inf_{n\geq 1}\tilde{f}_n\in\tilde{M}(\tilde{E})$.

下面我们证明 $\tilde{G}=(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n\in\tilde{M}(\tilde{E})$. 记 $\tilde{G}_n$ 为序列 $\tilde{f}_n,\tilde{f}_{n+1},\cdots,\tilde{f}_{n+m},\cdots$ 的上确界，根据上面所证，$\tilde{G}_n\in\tilde{M}(\tilde{E})$，$n=1,2,\cdots$，又由于

$$(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n=\inf_{n\geq 1}\tilde{G}_n,$$

及 $\tilde{G}_1\geq\tilde{G}_2\geq\cdots\geq\tilde{G}_n\geq\cdots$，因此，$(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n$ 是可测函数序列 $\{\tilde{G}_n\}$ 的下确界，从而，它是 $\tilde{E}$ 上可测的.

同样可以证明 $(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\tilde{f}_n\in\tilde{M}(\tilde{E})$.

定义 4.1.10 设 $\tilde{f}_n: X\to\mathscr{F}^*(R)$，$n=0,1,2,\cdots$，我们说 $\{\tilde{f}_n\}$

在点 $x\in X$ 依模糊距离 $\tilde{\rho}$ 收敛于 $\tilde{f}_0$，记为 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x)=\tilde{f}_0(x)$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N=N(\varepsilon,x)>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时，$\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_0(x))<\varepsilon$. 我们说 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $A\subset X$ 上依模糊距离 $\tilde{\rho}$ 收敛于 $\tilde{f}_0$，我们记 $\tilde{f}_0=(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n$，如果对于任何 $x\in A$，我们有 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x)=\tilde{f}_0(x)$. 我们说 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 A 上依模糊距离 $\tilde{\rho}$ 一致收敛于 $\tilde{f}_0$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N=N(\varepsilon)>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时对于任何 $x\in A$ 成立 $\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_0(x))<\varepsilon$.

命题 4.1.5

(1) $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x)=\tilde{f}(x)$ 的充分必要条件是 $\{f_{n_\lambda}^-(x)\}$ 和 $\{f_{n_\lambda}^+(x)\}$ 对于 $\lambda\in(0,1]$ 分别一致收敛于 $f_\lambda^-(x)$ 和 $f_\lambda^+(x)$.

(2) $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x)=\tilde{f}(x)$ 在 A 一致成立的充分必要条件是 $\{f_{n_\lambda}^-(x)\}$ 和 $\{f_{n_\lambda}^+(x)\}$ 对于任何 $x\in A$ 和 $\lambda\in(0,1]$ 一致收敛于 $f_\lambda^-(x)$ 和 $f_\lambda^+(x)$.

证明 显然.

推论 4.1.1 设 $\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{E})$，如果 $\tilde{f}=(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n$，则 $\tilde{f}\in\tilde{M}(\tilde{E})$.

定理 4.1.10 设 $\tilde{f}\in\tilde{M}$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，f_λ^- 和 f_λ^+ 都可以表示为实值简单函数列 $\{f_{n_\lambda}^-\}$ 和 $\{f_{n_\lambda}^+\}$ 的极限，如果 $\tilde{f}\geqslant 0$，则 $f_{n_\lambda}^-$ 和 $f_{n_\lambda}^+$ 可以取为非负的，并且可取 $\{f_{n_\lambda}^-\}$ 和 $\{f_{n_\lambda}^+\}$ 为单增序列.

证明 首先假定 $\tilde{f}\geqslant 0$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$f_\lambda^-\geqslant 0$ 和 $f_\lambda^+\geqslant 0$，于是对于每一个 $n=1,2,\cdots$，并对于每个 $x\in X$，令

$$f_{n_\lambda}^-(x)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^n}, & \text{当}\dfrac{i-1}{2^n}\leqslant f_\lambda^-(x)<\dfrac{i}{2^n}, i=1,2,\cdots,2^n n,\\ n, & \text{当 } f_\lambda^-(x)\geqslant n,\end{cases}$$

显然$f_{n_\lambda}^-(x)=\sum_{i=1}^{2^n n}\frac{i-1}{2^n}\cdot\chi_{\{x;\frac{i-1}{2^n}\leqslant f_\lambda^-(x)<\frac{i}{2^n}\}}(x)+n\cdot\chi_{\{x;f_\lambda^-(x)\geqslant n\}}(x)$，且$\{\chi_{\{x;0\leqslant f_\lambda^-(x)<\frac{1}{2^n}\}},\cdots,\chi_{\{x;\frac{2^n n-1}{2^n}\leqslant f_\lambda^-(x)<n\}},\chi_{\{x;f_\lambda^-(x)\geqslant n\}}\}$是$X$的一个模糊划分以及$\{f_{n_\lambda}^-\}$是单增序列，如果$f_\lambda^-(x)<\infty$，则对于任何$n$，有

$$0\leqslant f_\lambda^-(x)-f_{n_\lambda}^-(x)\leqslant\frac{1}{2^n};$$

如果$f_\lambda^-(x)=+\infty$，则对于任何n，有$f_{n_\lambda}^-(x)=n$，所以我们证明了定理的后半部分，对于一般的$\widetilde{f}\in\widetilde{M}$，则对于任何$\lambda\in(0,1]f_\lambda$，$f_\lambda^-\in M$，然后运用上述结果到$(f_\lambda^-)^+$，$(f_\lambda^+)^+$，$(f_\lambda^-)^-$和$(f_\lambda^+)$ 上并注意到$f_\lambda^-=(f_\lambda^-)^+-(f_\lambda^-)^-$和$f_\lambda^+=(f_\lambda^+)^+-(f_\lambda^+)^-$即可得到定理的前半部分的证明.

4.2 几乎处处收敛与依测度收敛

定义 4.2.1 设$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，$P$是一个命题，

(1) 如果P在$\widetilde{A}$的支集$\mathrm{supp}\widetilde{A}=\{x;\widetilde{A}(x)>0\}$上处处成立，且$\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{A}}\in\mathscr{G}$，则称$P$在$\widetilde{A}$上处处成立.

(2) 如果存在$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，且$\mu(\widetilde{E})=0$，使得$P$在$\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}$上处处成立，则称$P$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立.

命题 4.2.1

(1) P在$\widetilde{A}$上处处成立充分必要条件是存在$A\in\mathscr{P}(X)$且$\widetilde{A}\subset\chi_A$，使得$P$在$A$上处处成立.

(2) 如果$\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$P$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立充分必要条件是存在$\widetilde{E}\subset\widetilde{A}$，$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，且$\mu(\widetilde{E})-0$，使得$P$在$\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}$上处处成立.

证明 显然.

定理 4.2.1 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{M}(\widetilde{E})$，如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛，则必存在$\widetilde{f}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$，使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$.

证明 因为$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛，所以，存在$\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，且$\mu(\widetilde{F})=0$，使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\ominus\widetilde{F}$上处处收敛，从而$\{\widetilde{f}_n\}$在$\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})$上处处收敛. 又由于$\{\widetilde{f}_n\}$是$\widetilde{E}$上一列可测函数，则由定理 4.1.7(1)知$\{\widetilde{f}_n\}$是$\widetilde{E}\cap\chi_{\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})}$上的可测函数列. 我们作模糊值函数：

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{f}_n(x), & \text{当 } x\in\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F}),\\ 0, & \text{当 } x\notin\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F}).\end{cases}$$

由推论 4.1.1 知，$\widetilde{f}$在$\widetilde{E}\cap\chi_{\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})}$上可测，而$\widetilde{f}$在$\widetilde{E}\cap\chi^c_{\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})}$上可测是显然的，这样，由定理 4.1.7(2)知$\widetilde{f}$在$\widetilde{E}=(\widetilde{E}\cap\chi_{\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})})\oplus(\widetilde{E}\cap\chi^c_{\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})})$上可测，从而我们证明了该结论.

定理 4.2.2 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{M}(\widetilde{E})$，$\widetilde{f},\widetilde{g}\in\widetilde{M}(\widetilde{E})$，如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$又几乎处处收敛于$\widetilde{g}$，则$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{E}$上几乎处处成立.

证明 由于$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则存在$\widetilde{F}\in\mathscr{G}$且$\mu(\widetilde{F})=0$，使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\ominus\widetilde{F}$上处处收敛于$\widetilde{f}$，从而$\{\widetilde{f}_n\}$在$\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})$上处处收敛于$\widetilde{f}$，又由于$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛于$\widetilde{g}$，存在$\widetilde{G}\in\mathscr{G}$且$\mu(\widetilde{G})=0$，使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\ominus\widetilde{G}$上处处收敛于$\widetilde{g}$，从而$\{\widetilde{f}_n\}$在$\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{G})$上处处收敛于$\widetilde{g}$. 又由于

$$\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{F})\cap\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus\widetilde{G})=\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus(\widetilde{F}\cup\widetilde{G})),$$

所以，$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\mathrm{supp}(\widetilde{E}\ominus(\widetilde{F}\cup\widetilde{G}))$上处处成立. 再由命题 3.2.2 知

$$0\leqslant\mu(\widetilde{F}\cup\widetilde{G})\leqslant\mu(\widetilde{F})+\mu(\widetilde{G})=0,$$

即$\mu(\widetilde{F}\cup\widetilde{G})=0$，这样我们就证明了$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{E}$上几乎处处成立.

定理 4.2.3 (Egoroff 定理)设$\widetilde{A}\in\mathscr{G}$且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{M}$，且$\widetilde{f}_n(x)\neq\widetilde{\infty}$在$X$上几乎处处成立，$n=1,2,\cdots$，如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$

上几乎处处收敛于 $\widetilde{f}\in\widetilde{M}$ 且 $\widetilde{f}(x)\neq\widetilde{\infty}$ 在 X 上几乎处处成立，则对于每一个 $\epsilon>0$，存在 $\widetilde{F}\subset\widetilde{A}$ 且 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，使得 $\mu(\widetilde{F})<\epsilon$ 且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\ominus\widetilde{F}$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$.

证明　为了不失一般性，我们不妨设 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上处处收敛于 $\widetilde{f}$. 令

$$E_n^m=\bigcap_{i=n}^{\infty}\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{m}\right\},$$

则 $E_1^m\subset E_2^m\subset E_3^m\subset\cdots,m=1,2,\cdots$. 由于 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上处处收敛于 $\widetilde{f}$，所以，$\widetilde{A}\subset\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{E_n^m}$.

我们记

$$\widetilde{F}_n^m=\widetilde{A}\cap\chi_{E_n^m}^c,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{F}_n^m=\varnothing,m=1,2,\cdots,$$

且 $\widetilde{F}_1^m\supset\widetilde{F}_2^m\supset\cdots$，和 $\widetilde{F}_n^m\subset\widetilde{A}$，所以

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{F}_n^m)=0.$$

从而存在正整数 $n_0(m)$ 使得 $\mu(\widetilde{F}_{n_0(m)}^m)<\dfrac{\varepsilon}{2^m}$，记

$$\widetilde{E}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{F}_{n_0(m)}^m,$$

则 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，且

$$\mu(\widetilde{E})\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^m}=\varepsilon,$$

又因为

$$\begin{aligned}\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}&=\widetilde{A}\&\widetilde{E}^c=\widetilde{A}\&(\widetilde{A}^c\cup\bigcap_{m=1}^{\infty}\chi_{E_{n_0(m)}^m})\\&=(\widetilde{A}\&\widetilde{A}^c)\cup(\widetilde{A}\&\chi_{\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{n_0(m)}^m})-\widetilde{A}\&\chi_{\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{n_0(m)}^m}\\&\subset\chi_{\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{n_0(m)}^m}.\end{aligned}$$

下面我们证明$\{\widetilde{f}_n\}$在$\chi_{\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m}$上一致收敛于$\widetilde{f}$. 事实上，因为对于任何$\varepsilon>0$，存在$m_0>\frac{1}{\varepsilon}$，当$x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$时，$x\in E_{n_0(m_0)}^{m_0}$即

$$x\in\bigcap_{i=n_0(m_0)}^{\infty}\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{m_0}\}.$$

也就是说，当$i>n_0(m_0)$时

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{m_0}<\varepsilon.$$

这就证明了$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}$上一致收敛于$\widetilde{f}$.

如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则存在$\widetilde{G}\in\mathscr{G}$，$\widetilde{G}\subset\widetilde{A}$且$\mu(\widetilde{G})=0$使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}\ominus\widetilde{G}$上处处收敛于$\widetilde{f}$，由上述可知，对于任意$\varepsilon>0$，存在$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，$\widetilde{E}\subset\widetilde{A}\ominus\widetilde{G}$使得$\mu(\widetilde{E})<\varepsilon$且$\{\widetilde{f}_n\}$在$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{G})\ominus\widetilde{E}$上一致收敛于$\widetilde{f}$，因为

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}\ominus\widetilde{G})\ominus\widetilde{E}&=(\widetilde{A}\&\widetilde{G}^c)\&\widetilde{E}^c\\&=\widetilde{A}\&(\widetilde{G}\oplus\widetilde{E})^c=\widetilde{A}\ominus(\widetilde{G}\oplus\widetilde{E}),\end{aligned}$$

且

$$\mu(\widetilde{G}\oplus\widetilde{E})\leqslant\mu(\widetilde{G})+\mu(\widetilde{E})=\mu(\widetilde{E})<\varepsilon,$$

以及

$$\begin{aligned}(\widetilde{G}\oplus\widetilde{E})(x)&\leqslant(\widetilde{G}\oplus(\widetilde{A}\ominus\widetilde{G}))(x)\\&=\min(1,\widetilde{G}(x)+\max(0,\widetilde{A}(x)-\widetilde{G}(x)))\\&=\min(1,\max(\widetilde{G}(x),\widetilde{A}(x)))\\&=(\widetilde{A}\cup\widetilde{G})(x)=\widetilde{A}(x).\end{aligned}$$

所以，存在$\widetilde{G}\oplus\widetilde{E}\subset\widetilde{A}$且$\mu(\widetilde{G}\oplus\widetilde{E})<\varepsilon$，使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}\ominus(\widetilde{G}\oplus\widetilde{E})$上一致收敛于$\widetilde{f}$.

定义 4.2.2 设$\widetilde{f}_n: X\to\mathscr{F}^*(R)$，$n=1,2,\cdots$，我们说$\{\widetilde{f}_n\}$在点$x\in X$依模糊距离$\widetilde{\rho}$是基本的，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon,x)>0$使得当$n,m\geqslant N$时，成立

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))<\varepsilon.$$

我们说$\{\tilde{f}_n\}$在$A\subset X$上依模糊距离$\tilde{\rho}$是基本的，如果对于任何$x\in A$，$\{\tilde{f}_n(x)\}$都是基本的；我们说$\{\tilde{f}_n\}$在A上依模糊距离$\tilde{\rho}$一致基本的，如果对于任何的$\varepsilon>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon)>0$使得当$n,m\geqslant N$时，对于任何$x\in A$成立

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_m(x))<\varepsilon.$$

定义 4.2.3 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{M}$，$\tilde{f}_0\in\widetilde{M}$，$\tilde{f}_n(x)\neq\tilde{\infty}$在$X$上几乎处处成立，$n=0,1,2,\cdots$，如果对于每一个$\varepsilon>0$存在$\tilde{F}\in\mathscr{G}$且$\mu(\tilde{F})<\varepsilon$使得$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{F}^c$上一致收敛于$\tilde{f}$(分别地，$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{F}^c$上一致基本的)，则称$\{\tilde{f}_n\}$几乎一致收敛于$\tilde{f}$(分别地，$\{\tilde{f}_n\}$几乎一致基本的)。

定理 4.2.4 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{M}$，$\tilde{f}\in\widetilde{M}$，如果$\{\tilde{f}_n\}$几乎一致收敛于$\tilde{f}$(分别地，$\{\tilde{f}_n\}$是几乎一致基本的)，则$\{\tilde{f}_n\}$几乎处处收敛于$\tilde{f}$(分别地，$\{\tilde{f}_n\}$是几乎处处基本的)。

证明 设$\tilde{F}_n\in\mathscr{G}$，且$\mu(\tilde{F}_n)<\frac{1}{n}$，使得$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{F}_n^c$上一致收敛于$\tilde{f}$，$n=1,2,\cdots$，令$\tilde{F}=\mathop{\&}\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{F}_n$，则有

$$\mu(\tilde{F})\leqslant\mu(\tilde{F}_n)<\frac{1}{n},$$

从而$\mu(\tilde{F})=0$，下面我们证明$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{F}^c$上收敛于$\tilde{f}$。事实上，要证明$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{F}^c$上处处收敛于$\tilde{f}$，就是要证明$\{\tilde{f}_n\}$在$\operatorname{supp}\tilde{F}^c$上处处收敛于$\tilde{f}$。由于$\operatorname{supp}\tilde{F}^c=\operatorname{supp}((\mathop{\&}\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{F}_n)^c)=\operatorname{supp}(\mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{F}_n^c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{supp}\tilde{F}_n^c$。对于任何的$x\in\operatorname{supp}\tilde{F}^c$，存在$n_0\geqslant 1$使得$x\in\operatorname{supp}\tilde{F}_{n_0}^c$，从而由$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{F}_{n_0}^c$上一致收敛于$\tilde{f}$立知，$\{\tilde{f}_n\}$在点$x\in X$收敛于$\tilde{f}$。

对于基本列，我们可以类似证明。

定义 4.2.4 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{A})$，$\tilde{f}\in\tilde{M}(\tilde{A})$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^-\left(\tilde{A}\cap\chi_{\{x\mid|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\}}\right)=0$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+\left(\tilde{A}\cap\chi_{\{x\mid|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\}}\right)=0.$$

对于 $\lambda\in(0,1]$一致成立，则称$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，如果对于任何的 $\varepsilon>0$，有

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu\left(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}}\right)=0,$$

则称$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu_\lambda^-\left(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}(x)-f_{m_\lambda}(x)|\geqslant\varepsilon\}}\right)=0$$

和

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu_\lambda^+\left(\tilde{A}\cap\chi_{\{x\mid|f_{n_\lambda}^+(x)-f_{m_\lambda}^-(x)|\geqslant\varepsilon\}}\right)=0,$$

对 $\lambda\in(0,1]$一致成立，则称$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上是依模糊值测度 μ 基本的；如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$(\tilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu\left(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_m(x))\nless\varepsilon\}}\right)=0,$$

则称$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 基本的.

命题 4.2.2 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{E})$，$\tilde{f}\in\tilde{M}(\tilde{E})$，则

(1) 如果$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{E}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，则$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{E}$ 上依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$；

(2) 如果$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{E}$ 上强依模糊值测度 μ 基本的，则$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{E}$ 上依模糊值测度 μ 基本的.

证明 (1) 因为 $\lambda\in(0,1]$

$$\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\}$$

和

$$\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\},$$

所以由 μ 的单调性及 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{E}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$ 知

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\}})$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\}})=0,$$

和

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+(\tilde{E}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\varepsilon\}})$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+(\tilde{E}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\}})=0,$$

即 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{E}$ 上依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

(2) 类似可证.

定理 4.2.5 (Lebesgue 定理)设 $\tilde{A}\in\mathscr{G}$,且 $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$,$\mu(\mathscr{G})=\{\mu(\tilde{A});\tilde{A}\in\mathscr{G}\}\in A^*$,$\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{A})$,$\tilde{f}\in\tilde{M}(\tilde{A})$,如果 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$,则 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

证明 根据模糊数收敛的定义,模糊数序列 $\{\tilde{f}_n(x)\}$ 不收敛到 $\tilde{f}(x)$ 的充分必要条件是存在一个正实数 ε,使得对于 n 的无限多个值有 $x\in E_n(\varepsilon)=\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\}$. 换言之,如果 D 是使得 $\{\tilde{f}_n(x)\}$ 不收敛于 $\tilde{f}(x)$ 的点 x 所构成的集合,则 $D=\bigcup_{\varepsilon>0}\limsup_n E_n(\varepsilon)$,再由 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$,我们有 $\mu(\tilde{A}\cap\chi_D)=0$.

另一方面,由 μ 的连续性和

$$0\leqslant\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\limsup_n E_n(\varepsilon)})\leqslant\mu(\tilde{A}\cap\chi_D)=0,$$

我们有

$$0=\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\limsup_n E_n(\varepsilon)})=\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m(\varepsilon)})$$

$$=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m(\varepsilon)})\geqslant(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{E_n(\varepsilon)})\geqslant0,$$

故

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\}})=0.$$

即$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值测度μ收敛于$\tilde{f}$.

推论 4.2.1 设$\tilde{A}\in\mathscr{G}$, $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$, $\mu(\mathscr{G})=\{\mu(\tilde{A});\tilde{A}\in\mathscr{G}\}\in A^*$, $\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{A})$, $\tilde{f}\in\tilde{M}(\tilde{A})$. 如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上几乎处处收敛于$\tilde{f}$,则$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上依模糊值测度$\mu$收敛于$\tilde{f}$.

证明 由定理 4.2.5 和命题 4.2.2 立得.

推论 4.2.2 设$\tilde{A}\in\mathscr{G}$, $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$, $\mu(\mathscr{G})=\{\mu(\tilde{A});\tilde{A}\in\mathscr{G}\}\in A^*$, $\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{A})$,如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上几乎处处基本的,则$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上依模糊值测度$\mu$基本的.

证明 由定理 4.2.6 和命题 4.2.2 立得.

定理 4.2.6 设$\tilde{A}\in\mathscr{G}$,且$\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$和$\mu(\mathscr{G})=\{\mu(\tilde{A});\tilde{A}\in\mathscr{G}\}\in A^*$, $\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}(\tilde{A})$,如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上几乎处处基本的,则$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值测度$\mu$基本的.

证明 类似定理 4.2.5 可证.

定理 4.2.7 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}$, $\tilde{f}\in\tilde{M}$,如果$\{\tilde{f}_n\}$几乎一致收敛于$\tilde{f}$(分别地,$\{\tilde{f}_n\}$是几乎一致基本的),则$\{\tilde{f}_n\}$强依模糊值测度μ收敛于$\tilde{f}$(分别地,$\{\tilde{f}_n\}$是强依模糊值测度μ基本的).

证明 如果$\{\tilde{f}_n\}$几乎一致收敛于$\tilde{f}$,则对于任意给定的$\varepsilon>0$和$\delta>0$,存在$\tilde{F}\in\mathscr{G}$,使得$\mu(\tilde{F})<\delta$,并使得$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{F}^c$上一致收敛于$\tilde{f}$. 所以,对于上述$\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n\geqslant N$时,对于任何的$x\in\mathrm{supp}(\tilde{F}^c)$成立

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon.$$

从而,

$$\mathrm{supp}(\tilde{F}^c)\subset\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon\},$$

故

$$\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x)) \not< \varepsilon\} \subset (\mathrm{supp}(\tilde{F}^c))^c.$$

即，当 $n \geqslant N$ 时，

$$\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\}} \subset \chi_{(\mathrm{supp}(\tilde{F}^c))^c}.$$

下面我们只要证明 $\chi_{(\mathrm{supp}(\tilde{F}^c))^c} \subset \tilde{F}$ 即可. 事实上，对于任何 $x \in (\mathrm{supp}(\tilde{F}^c))^c$，则 $x \notin \mathrm{supp}(\tilde{F}^c)$，即 $\tilde{F}^c(x)=0$，从而，$\tilde{F}(x)=1$，故 $\chi_{(\mathrm{supp}(\tilde{F}^c))^c} \subset \tilde{F}$.

定理 4.2.8 设 $\{\tilde{f}_n\} \subset \tilde{M}$，$\tilde{f},\tilde{g} \in \tilde{M}$，则

(1) 如果 $\{\tilde{f}_n\}$ 强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$（分别地，$\{\tilde{f}_n\}$ 依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$），则 $\{\tilde{f}_n\}$ 是强依模糊值测度 μ 基本的（分别地，依模糊值测度 μ 基本的）；

(2) 如果 $\{\tilde{f}_n\}$ 强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$（分别地，$\{\tilde{f}_n\}$ 依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$），同时 $\{\tilde{f}_n\}$ 强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{g}$（分别地，$\{\tilde{f}_n\}$ 依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{g}$），则 $\tilde{f}=\tilde{g}$ 几乎处处成立.

证明

(1) 因为对于任意给定的 $\varepsilon>0$，

$$\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_m(x)) \not< \varepsilon\}$$

$$\subset \left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x)) \not< \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_m(x),\tilde{f}(x)) \not< \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_m(x))\not<\varepsilon\}}) \\ &\leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\}}) \\ &\quad + (\tilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_m(x),\tilde{f}(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\}}) = 0. \end{aligned}$$

即 $\{\tilde{f}_n\}$ 是强依模糊值测度基本的.

(2) 因为对于任意给定的 $\varepsilon>0$，

$$\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x)) \not< \varepsilon\}$$

$$\subset \left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x)) \nless \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),g(x)) \nless \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

所以

$$0 \leqslant \mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))\nless\varepsilon\}}) \leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\}})$$

$$+ (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\}}) = 0.$$

再由 ε 的任意性，

$$\mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))\neq 0\}}) = 0.$$

即 $\tilde{f}=\tilde{g}$ 几乎处处成立.

定理 4.2.9 (Riesz 定理)设 $\{\tilde{f}_n\} \subset \tilde{M}(\tilde{A})$，$\tilde{f} \in \tilde{M}(\tilde{A})$，$\mu(\mathscr{G}) = \{\mu(\tilde{A}); \tilde{A} \in \mathscr{G}\} \in A^*$，如果 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，则一定存在 $\{\tilde{f}_n\}$ 的子序列 $\{\tilde{f}_{n_i}\}$ 使得 $\{\tilde{f}_{n_i}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$.

证明 因为 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$. 所以，对于任何自然数 k，存在 n_k 使得

$$\mu(\tilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{1}{2^k}\}}) < \frac{1}{2^k}.$$

不失一般性，我们可以假设 $n_{k+1} \geqslant n_k$，$k=1,2,\cdots$，如果我们记

$$E_k = \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{1}{2^k}\}}$$

并记

$$\tilde{F}_i = \bigcap_{k=i}^{\infty} (\tilde{A} \ominus \tilde{A} \cap \chi_{E_k}).$$

则

$$\tilde{F}_i = \bigcap_{k=i}^{\infty} (\tilde{A} \cap \chi_{E_k^c})$$

$$= \bigcap_{k=i}^{\infty} (\tilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{2^k}\}}),$$

因此，$\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 在 $\tilde{F}_i$ 上一致收敛于 $\tilde{f}$，$i=k,k+1,\cdots$. 再作 $\tilde{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{F}_i$，则

$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$在 $\widetilde{F}$ 上处处收敛于 $\widetilde{f}$.

现在我们只要证明 $\mu(\widetilde{A}\ominus\widetilde{F})=0$ 即可. 事实上,

$$\widetilde{A}\ominus\widetilde{F}=\widetilde{A}\ominus\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{F}_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}(\widetilde{A}\ominus\widetilde{F}_i)$$

$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{A}\ominus(\bigcap_{k=i}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\chi_{E_k^c}))$$

$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}(\widetilde{A}\ominus(\widetilde{A}\cap\chi_{E_k^c}))$$

$$=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\chi_{E_k}).$$

以及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{E_k})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1,$$

根据推论 3.2.4 知

$$\mu(\widetilde{A}\ominus\widetilde{F})=\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\chi_{E_k}))=0.$$

定理 4.2.10 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{M}$,如果$\{\widetilde{f}_n\}$是强依模糊值测度 μ 基本的,则$\{\widetilde{f}_n\}$包含一个几乎一致基本的子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$.

证明 因为$\{\widetilde{f}_n\}$是强依模糊值测度 μ 基本的,则对于每一个正整数 k,存在 n_k',使得当 $m,n\geqslant n_k'$ 时,

$$\mu(\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_m(x),\widetilde{f}_n(x))\nless\frac{1}{2^k}\right\}})<\frac{1}{2^k}.$$

令

$$n_1=n_1',n_2=(n_1+1)\vee n_2',\cdots,$$
$$n_k=(n_{k-1}+1)\vee n_k',\cdots,$$

则 $n_1<n_2<n_3<\cdots$,因此,$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$是$\{\widetilde{f}_n\}$的一个无穷子列,我们再令

$$E_k=\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k+1}}(x),\widetilde{f}_{n_k}(x))\nless\frac{1}{2^k}\right\},k=1,2,\cdots,$$

则对于任何 $x\notin E_k\cup E_{k+1}\cup E_{k+2}\cup\cdots,k\leqslant i\leqslant j$,我们有

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_i}(x),\tilde{f}_{n_j}(x))\leqslant\sum_{m=i}^{\infty}\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_m}(x),\tilde{f}_{n_{m+1}}(x))$$

$$<\sum_{m=i}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^{i-1}}.$$

因此，$\{\tilde{f}_{n_i}\}$在$(\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i)^c=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i^c$上是一致基本的. 又由命题 3.2.5

$$\mu(\bigoplus_{i=k}^{\infty}\chi_{E_i})\leqslant\sum_{i=k}^{\infty}\mu(\chi_{E_i})<\frac{1}{2^k}.$$

所以，$\{\tilde{f}_{n_i}\}$是几乎一致基本列.

定理 4.2.11 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}$，对任何 $k>0$，$x\in X$，$\{\inf_{n\geqslant k}\tilde{f}_n(x)\}$，$\{\sup_{n\geqslant k}\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$，如果$\{\tilde{f}_n\}$是强依模糊值测度 μ 基本的，则存在 $\tilde{f}\in\tilde{M}$，使得$\{\tilde{f}_n\}$强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

证明 由定理 4.2.10，存在几乎一致基本的子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$，因此由定理 4.2.4$\{\tilde{f}_{n_k}\}$也是几乎处处基本的. 根据定理 4.2.4，存在使得$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}f_{n_k}(x)$存在的 x，对于这样的 x，我们令

$$\tilde{f}(x)=(\tilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\tilde{f}_{n_k}(x).$$

对于每一个 $\varepsilon>0$，我们有

$$\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}$$

$$\subset\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_{n_k}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$\cup\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

根据假定，当 n 和 n_k 充分大时，$\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_{n_k}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\}}$的模糊值测度可以是任意小，而 $\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\}}$的模糊值测度当 $k\to\infty$时是趋于0的. 即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}})=0.$$

我们结合定理 4.2.8 和定理 4.2.11，我们得到

定理 4.2.12 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}$，对任何 $k>0, x\in X$，$\{\inf_{n\geq k}\tilde{f}_n(x)\}$，$\{\sup_{n\geq k}\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$，则$\{\tilde{f}_n\}$是强依模糊值测度 μ 基本的充分必要条件是存在 $\tilde{f}\in\tilde{M}$，使得$\{\tilde{f}_n\}$强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

推论 4.2.3 设 $\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}$，对于任何 $k>0$，$x\in X$，$\{\inf_{n\geq k}\tilde{f}_n(x)\}$，$\{\sup_{n\geq k}\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$，如果存在 $\tilde{h}\in\tilde{M}$，使得$\{\tilde{f}_n\}$强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{h}$，则存在 $\tilde{f}\in\tilde{M}$，使得 $\tilde{f}=\tilde{h}$ 几乎处处成立，且$\{\tilde{f}_n\}$强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

证明 因为$\{\tilde{f}_n\}$强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{h}$，所以，由定理 4.2.8(1)$\{\tilde{f}_n\}$是强依模糊值测度 μ 基本的，再由定理 4.2.11 存在 $\tilde{f}\in\tilde{M}$ 使得$\{\tilde{f}_n\}$强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，根据 4.2.8(2)知 $\tilde{f}=\tilde{h}$ 几乎处处成立.

定理 4.2.13 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\tilde{M}$，$\tilde{f}\in\tilde{M}$，$\tilde{A}\in\mathscr{G}$，$\mu(\tilde{A})\neq\infty$，和 $\mu(\mathscr{G})=\{\mu(\tilde{A});\tilde{A}\in\mathscr{G}\}\in A^*$，则$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$的充分必要条件是对于$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$都可以从中再找到一个子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_j}}\}$使得它在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$.

证明 必要性，如果$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，则显然$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$也在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度收敛于 $\tilde{f}$，对于$\{\tilde{f}_{n_k}\}$和 $\tilde{f}$我们应用定理 4.2.9，一定存在$\{\tilde{f}_{n_k}\}$的子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_j}}\}$使得它在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$.

充分性. 设$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$都有子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_j}}\}$使得它在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$. 现证明$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值测度 μ 收

敛于$\widetilde{f}$. 假若不然,则存在$\varepsilon>0$,使得

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\geqslant\varepsilon\}})$$

不依模糊距离$\widetilde{\rho}$收敛于0,从而

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\geqslant\varepsilon\}})>0.$$

这样,我们可以选出一个子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$使得

$$(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_k}(x),\widetilde{f}(x))\geqslant\varepsilon\}})$$

$$=(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\geqslant\varepsilon\}}).$$

因此,$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$中就不能存在任何在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_i}}\}$,因为如果存在子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_i}}\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$,根据定理4.2.5$\{\widetilde{f}_{n_{k_i}}\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值测度$\mu$收敛于$\widetilde{f}$,即

$$(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k_i}}(x),\widetilde{f}(x))\geqslant\varepsilon\}})=0.$$

这与

$$(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_k}(x),\widetilde{f}(x))\geqslant\varepsilon\}})>0$$

是矛盾的.

4.3 模糊值可测函数与模糊值$\mathscr{B}$-函数的关系

4.3.1 可测空间上的实值简单$\mathscr{B}$-函数

定义4.3.1 设$s=(\underline{A},\underline{a})$是一个实值简单函数,如果$\widetilde{A}_i\in\mathscr{G}$,$i=1,2,\cdots,n$,则称$s$为实值简单$\mathscr{B}$-函数.所有实值简单$\mathscr{B}$-函数的全体记为$\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$,如果对于$a_i\geqslant0$,$i=1,2,\cdots,n$,则称$s$为非负实值简单$\mathscr{B}$-函数,所有非负实值简单$\mathscr{B}$-函数的全体记为$\mathscr{B}_{\mathscr{G}}^+$.

注4.3.1 $\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$中包含序偶$(\{X\},c)$,$c\in R$,这样的序偶叫做常实值简单$\mathscr{B}$-函数.

为了方便，实值简单函数 $s=(\underline{A},\underline{a})$ 记为

$$s=\sum_{i=1}^{n}a_i\widetilde{A}_i.$$

注 4.3.2 两个不同的实值简单 $\mathscr{B}$-函数的值可以是相等的，也就是说，两个实值简单 $\mathscr{B}$-函数的值在任何的点 $x\in X$ 都是相等的，但是这两个实值简单 $\mathscr{B}$-函数可能是不同的. 例如

例 4.3.1 我们设

$$X=[0,1];$$
$$s=((\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2),(2,3));$$
$$s'=((\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,\widetilde{B}_3),(2,2,3));$$

其中

$$\widetilde{A}_1(x)=\frac{1}{1-x},\qquad \widetilde{A}_2(x)=\frac{x}{1+x}=\widetilde{B}_3(x),$$

$$\widetilde{B}_1(x)=\frac{\dfrac{1+2x}{1+x}}{1+2x}-\frac{x}{},\quad \widetilde{B}_2(x)=\frac{x}{1+2x}.$$

则 $s\neq s'$，但是对于任何 $x\in X$，

$$s(x)=\frac{2+3x}{1+x}=s'(x).$$

定义 4.3.2 设 $s_1=\sum_{i=1}^{p}a_i\widetilde{A}_i$ 和 $s_2=\sum_{j=1}^{q}b_j\cdot\widetilde{B}_j$ 是两个简单函数，我们称

$$s_1+s_2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\cdot\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j$$

为 s_1 与 s_2 的和；称

$$s_1\cdot s_2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}a_i\cdot b_j\cdot\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j$$

为 s_1 与 s_2 的积.

显然，如果 s_1 和 s_2 是实值简单 $\mathscr{B}$-函数时，s_1+s_2 与 $s_1\cdot s_2$ 也

是实值简单 $\mathscr{B}$-函数，并且它们满足交换律和结合律，同时还有

$$(s_1+s_2)(x)=s_1(x)+s_2(x),(s_1\cdot s_2)(x)=s_1(x)\cdot s_2(x).$$

定义 4.3.3 设 $s_1=\sum_{i=1}^{p}a_i\widetilde{A}_i$ 与 $s_2=\sum_{j=1}^{q}b_j\cdot\widetilde{B}_j$ 是两个实值简单 $\mathscr{B}$-函数，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，如果对于任何使 $\widetilde{A}(x)\neq 0$ 的 x 及任意指标对 i,j，其中 $1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant q$ 总有

$$(a_i\quad b_j)\widetilde{A}_i(x)\cdot\widetilde{B}_j(x)\geqslant 0,$$

则称 s_1 在 $\widetilde{A}$ 上先于 s_2，记为 $s_1\geqslant_{\widetilde{A}}s_2$. 如果 $\widetilde{A}=X$，简记为 $s_1\geqslant s_2$. 如果 $s_1\geqslant_{\widetilde{A}}s_2$ 且 $s_2\geqslant_{\widetilde{A}}s_1$，则称 s_1 与 s_2 在 $\widetilde{A}$ 上是等价的，记为 $s_1\sim_{\widetilde{A}}s_2$.

注 4.3.3 如果 s 是非负的，则 $s\geqslant_{\widetilde{A}}O=\sum_{i=1}^{p}O\cdot\widetilde{A}_i$.

命题 4.3.1

(a) 如果 $s_1\geqslant_{\widetilde{A}}s_2$ 和 $\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\neq\varnothing$，则 $a_i\geqslant b_j$；

(b) 如果 $s_1\geqslant s_2$，则 $s_1(x)\geqslant s_2(x)(\forall\ x\in X)$；

(c) 如果 $s_1\sim_{\widetilde{A}}s_2$，则 $s_1(x)\widetilde{A}(x)=s_2(x)\widetilde{A}(x)\quad\forall\ x\in X$.

证明 显然.

注 4.3.4 对于任何 $x\in X$，$s_1(x)\geqslant s_2(x)$，不一定成立 $s_1\geqslant s_2$，进一步地，如果 $s_1(x)=s_2(x)$，$\forall\ x\in X$，不一定成立 $s_1\sim s_2$. 例如

我们设 $s=2\widetilde{A}_1+3\widetilde{A}_2$；

$$s'=2\widetilde{B}_1+2\widetilde{B}_2+3\widetilde{B}_3,$$

且

$$s(x)=s'(x),\quad\forall\ x\in X.$$

但是由于 $\widetilde{A}_2\cdot\widetilde{B}_2\neq\varnothing$，及 $a_2=3\neq 2=b_2$，所以

$$s\not\sim s'.$$

4.3.2 可测空间上的模糊值 $\mathscr{B}$-函数

定义 4.3.4 设 $f:X\to[-\infty,+\infty]$ 是一个广义实值函

数，$s=\sum_{i=1}^{n}a_i\widetilde{A}_i$ 是一个实值简单 $\mathscr{B}$- 函数，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，我们说 s 在 $\widetilde{A}$ 上弱于 f，记为 $f\vdash\!\!-_{\widetilde{A}}s$，如果对于任何 $x\in X$，我们有

$$(f(x)-a_i)\widetilde{A}_i(x)\widetilde{A}(x)\geqslant 0.$$

在 $\widetilde{A}$ 上所有弱于 f 的 s 记为 $\mathscr{B}(f,\widetilde{A})$，在 $\widetilde{A}$ 上所有弱于 f 的非负 s 记为 $\mathscr{B}^+(f,\widetilde{A})$. 如果 $\widetilde{A}=X$，我们将它们分别简单记为 $\mathscr{B}(f)$ 和 $\mathscr{B}^+(f)$.

命题 4.3.2 设 $s=\sum_{i\in K}a_i\widetilde{A}_i\in\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$，$K$ 是一个有限指标集，我们分别记

$$K^+=\{i\in K;a_i>0\},K^-=\{i\in K,a_i<0\},$$

$$s^+=\sum_{i\in K}a_i^+\widetilde{A}_i,\quad s^-=\sum_{i\in K}a_i^-\widetilde{A}_i.$$

其中

$$a_i^+=\begin{cases}a_i, & i\in K^+,\\ 0, & i\in K\backslash K^+.\end{cases}\qquad a_i^-=\begin{cases}-a_i, & i\in K^-,\\ 0, & i\in K\backslash K^-.\end{cases}$$

则 $s^+,s^-\in\mathscr{B}_{\mathscr{G}}^+$，且 $s=s^+-s^-$.

证明 显然.

定义 4.3.5 设 $f:X\to[-\infty,+\infty]$是一个广义实值函数，$s\in\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，如果 $f_+\vdash\!\!-_{\widetilde{A}}s^+$，$f_-\vdash\!\!-_{\widetilde{A}}s^-$，则称 s 在 $\widetilde{A}$ 上偏弱于 f，记为 $f\Vdash\!\!=_{\widetilde{A}}s$，其中

$$f_+(x)=\max(f(x),0),f_-(x)=\max(-f(x),0),\forall\ x\in X.$$

注 4.3.5 如果 $f:X\to[0,+\infty]$，$s\in\mathscr{B}_{\mathscr{G}}^+$，则 $f\Vdash\!\!=_{\widetilde{A}}s$ 充分必要条件是 $f\vdash\!\!-_{\widetilde{A}}s$.

命题 4.3.3

(a) 如果 $f\vdash\!\!-s$，则 $f(x)\geqslant s(x)(\forall\ x\in X)$；

(b) 如果对于任何 $x\in X$，$f(x)\geqslant 0$，则 $\mathscr{B}^+(f)$包含所有系数为零的实值简单函数；

(c) 如果 $f(x)\geqslant g(x)$，$\forall\ x\in X$，则 $\mathscr{B}(g)\subset\mathscr{B}(f)$；

(*d*) 如果 $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$, $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$, $f\,|\!\!-\!\!\!-_{\widetilde{A}}\,s$, 则 $f\,|\!\!-\!\!\!-_{\widetilde{B}}\,s$.

证明 显然.

命题 4.3.4 设 $s_1=\sum_{i=1}^{p}a_i\widetilde{A}_i$, $s_2=\sum_{j=1}^{q}b_j\widetilde{B}_j$ 是两个实值简单 $\mathscr{B}$-函数, $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$, f 和 g 都是从 X 到$[-\infty,+\infty]$的广义实值函数,则

(*a*) 如果 $s_1\in\mathscr{B}(f,\widetilde{A})$, $s_2\in\mathscr{B}(g,\widetilde{A})$, 则 $s_1+s_2\in\mathscr{B}(f+g,\widetilde{A})$;

(*b*) 如果 $s_1\in\mathscr{B}^-(f,\widetilde{A})$, $s_2\in\mathscr{B}^-(g,\widetilde{A})$, 则 $s_1+s_2\in\mathscr{B}^+(f+g,\widetilde{A})$;

(*c*) 如果 $s_1\in\mathscr{B}(f,\widetilde{A})$, $s_2\in\mathscr{B}^+(g,\widetilde{A})$, 则 $s_1\cdot s_2\in\mathscr{B}(f\cdot g,\widetilde{A})$;

(*d*) 如果 $s_1\in\mathscr{B}^+(f,\widetilde{A})$, $s_2\in\mathscr{B}^+(g,\widetilde{A})$, 则 $s_1\cdot s_2\in\mathscr{B}^+(f\cdot g,\widetilde{A})$.

证明

(*a*) 设 $f\,|\!\!-\!\!\!-_{\widetilde{A}}\,s_1$, $g\,|\!\!-\!\!\!-_{\widetilde{A}}\,s_2$, 则对于任何 $x\in X$ 有

$$(f(x)-a_i)\widetilde{A}_i(x)\widetilde{A}(x)\geqslant 0 \text{ 和 } (g(x)-b_j)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x)\geqslant 0.$$

因此,对于任何 $x\in X$, $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant q$, 我们有

$$((f(x)+g(x))-(a_i+b_j))\widetilde{A}_i(x)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x)\geqslant 0,$$

即 $s_1+s_2\in\mathscr{B}(f+g,\widetilde{A})$.

(*b*) 我们只要注意到当 $\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\neq\varnothing$ 时, $\widetilde{A}_i\neq\varnothing$ 和 $\widetilde{B}_j\neq\varnothing$, 因此 $s_1\in\mathscr{B}^+(f,\widetilde{A})$ 和 $s_2\in\mathscr{B}^+(g,\widetilde{A})$ 知 $a_i\geqslant 0$, $b_j\geqslant 0$, 从而 $a_i+b_j\geqslant 0$ 即可.

(*c*) 我们只要证明,对于任何 $x\in X$, $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant q$,

$$(f(x)g(x)-a_ib_j)\widetilde{A}_i(x)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x)\geqslant 0$$

即可. 事实上,当 $\widetilde{A}_i(x)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x)=0$ 时,上式显然成立. 当 $\widetilde{A}_i(x)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x)\neq 0$ 时, $f(x)\geqslant a_i$, $g(x)\geqslant b_j\geqslant 0$, 因此 $f(x)g(x)\geqslant a_ib_j$, 从而

$$(f(x)g(x) - a_i b_j)\widetilde{A}_i(x)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x) \geqslant 0.$$

(d) 类似(c)可证.

命题 4.3.5 设 $f: X \to [-\infty, +\infty]$ 是一个广义实值函数, $s_1 = \sum_{i=1}^{p} a_i \widetilde{A}_i$, $s_2 = \sum_{j=1}^{q} b_j \widetilde{B}_j$ 是两个实值简单 $\mathscr{B}$ 函数, $\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X)$, 如果 $f \vdash_{\widetilde{A}} s_1 \geqslant_{\widetilde{A}} s_2$, 则 $f \vdash_{\widetilde{A}} s_2$.

证明 我们只要证明对于任何 $x \in X$ 和 $1 \leqslant j \leqslant q$ 有

$$(f(x) - b_j)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x) \geqslant 0.$$

如果 $\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x) = 0$, 上式显然成立. 如果 $\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x) \neq 0$, 则存在 i_0 使得 $\widetilde{A}_{i_0}(x)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x) \neq 0$, 又由于 $f \vdash_{\widetilde{A}} s_1$, 我们有

$$f(x) \geqslant a_{i_0} \geqslant b_j,$$

从而

$$(f(x) - b_j)\widetilde{B}_j(x)\widetilde{A}(x) \geqslant 0.$$

推论 4.3.1 设 f 是一个广义实值函数, $s \in \mathscr{B}_0^+$, 如果 $f \vdash s$, 则 f 是一个非负广义实值函数.

证明 显然.

定义 4.3.6

(1) 设 $f: X \to [0, +\infty]$ 是一个非负广义实值函数, $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$, 我们说 f 是一个 $\widetilde{A}$ 上关于 $\mathscr{G}$ 的 $\mathscr{B}$-函数, 简称 $\widetilde{A}$ 上 $\mathscr{B}$-函数, 如果存在 $\{s_n\} \subset \mathscr{B}^+(f, \widetilde{A})$, 使得

$$s_{n+1} \geqslant_{\widetilde{A}} s_n \quad n = 1, 2, \cdots \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} s_n(x)\widetilde{A}(x) = f(x)\widetilde{A}(x)\ (\forall\ x \in X).$$

(2) 设 $f: X \to [-\infty, +\infty]$ 是一个广义实值函数, $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$, 我们说 f 是一个 $\widetilde{A}$ 上关于 $\mathscr{G}$ 的 $\mathscr{B}$ 函数, 简称 $\widetilde{A}$ 上 $\mathscr{B}$ 函数, 如果 f_+ 和 f_- 都是(1)中定义的 $\widetilde{A}$ 上 $\mathscr{B}$-函数.

我们把 $\widetilde{A}$ 上非负 $\mathscr{B}$-函数全体记为 $\mathscr{B}^+(\widetilde{A})$, 把 $\widetilde{A}$ 上一般 $\mathscr{B}$-函数全体记为 $\mathscr{B}(\widetilde{A})$, 如果 $\widetilde{A} = X$, 将它们分别简单记为 $\mathscr{B}^+$ 和 $\mathscr{B}$.

定义 4.3.7

(1) 设 $\tilde{f}: X \to \mathscr{F}^*_+(R)$ 是一个模糊值函数，$\tilde{A} \in \mathscr{G}$，我们说 $\tilde{f}$ 是一个 $\tilde{A}$ 上(关于 $\mathscr{G}$)的模糊值 $\mathscr{B}$-函数，如果对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$f_\lambda^-, f_\lambda^+ \in \mathscr{B}^+(\tilde{A})$.

(2) 设 $\tilde{f}: X \to \mathscr{F}^*(R)$ 是一个模糊值函数，$\tilde{A} \in \mathscr{G}$，我们说 $\tilde{f}$ 是一个 $\tilde{A}$ 上(关于 $\mathscr{G}$)的模糊值 $\mathscr{B}$-函数，如果对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$f_\lambda^-, f_\lambda^+ \in \mathscr{B}(\tilde{A})$.

我们把 $\tilde{A}$ 上 $\tilde{f}(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in X$ 的模糊值 $\mathscr{B}$-函数全体记为 $\tilde{\mathscr{B}}^-(\tilde{A})$，把一般模糊值 $\mathscr{B}$-函数的全体记为 $\tilde{\mathscr{B}}(\tilde{A})$，如果 $\tilde{A} = X$，将它们分别简单记为 $\tilde{\mathscr{B}}^+$ 和 $\tilde{\mathscr{B}}$.

定理 4.3.1 设 $\tilde{f}_n: X \to \mathscr{F}^*_+(R)$，$n = 1,2,\cdots$，是一个模糊值 $\mathscr{B}$-函数列且 $\{\tilde{f}_n(x)\} \in A^*$，$x \in X$，如果

$$\tilde{f}_1(x) \leqslant \tilde{f}_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \tilde{f}_n(x) \leqslant \tilde{f}_{n+1}(x) \leqslant \cdots, x \in X \tag{4.3.1}$$

则存在 $\tilde{f}^* \in \tilde{\mathscr{B}}^-$，使得对于任何 $x \in X$，

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x).$$

证明 由于对于任何 $x \in X$，$\{\tilde{f}_n(x)\} \in A^*$，且 $\{\tilde{f}_n(x)\}$ 是一个单调增加的模糊数序列，所以，根据定理 2.4.1，对于任何的 $x \in X$，我们有

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n(x) \triangleq \tilde{f}(x) \in \mathscr{F}^*_+(R).$$

下面我们证明 $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}^+$. 即证明对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$f_\lambda^-, f_\lambda^+ \in \mathscr{B}^+$. 我们仅证明 $f_\lambda^- \in \mathscr{B}^+$，$f_\lambda^+ \in \mathscr{B}^+$ 类似可证. 要证明 $f_\lambda^- \in \mathscr{B}^+$，也就是说，我们要构造非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列 $\{t_{n_\lambda}^-\}$ 使得它满足下述条件

$$\lim_{n\to\infty} t_{n_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x) \tag{4.3.2}$$

$$f_\lambda^- \vdash t_{n_\lambda}^-,\quad n = 1,2,\cdots \tag{4.3.3}$$

$$t_{n+1_\lambda} \geqslant t_{n_\lambda},\quad n = 1,2,\cdots \tag{4.3.4}$$

事实上,因为 $\widetilde{f}_n(x)\geqslant 0$,所以,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$f_{n_\lambda}^-(x)\geqslant 0$,即对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$\{f_{n_\lambda}^-\}\subset\mathscr{B}^+$. 所以对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$k=1,2,\cdots$,由定义 4.3.6,存在 $\{s_{k,n_\lambda}^-\}\subset\mathscr{B}^+(f_{k_\lambda}^-)$,使得

$$\lim_{n\to\infty} s_{k,n_\lambda}^-(x) = f_{k_\lambda}^-(x),\quad x\in X,\lambda\in(0,1]. \tag{4.3.5}$$

$$f_{k_\lambda} \vdash s_{k,n_\lambda}^-,\quad \lambda\in(0,1],n = 1,2,\cdots, \tag{4.3.6}$$

$$s_{k,n+1_\lambda}^- \geqslant s_{k,n_\lambda}^-,\quad \lambda\in(0,1],n = 1,2,\cdots, \tag{4.3.7}$$

让我们假设

$$s_{k,n_\lambda}^- = \sum_{i\in K(k,n)} a_i^{k,n}\cdot \widetilde{A}_i^{k,n},(k,n)\in N\times N, \tag{4.3.8}$$

其中 $K(k,n)$ 是一个有限指标集,我们记

$$H(n) = K(1,n)\times K(2,n)\times\cdots\times K(n,n), \tag{4.3.9}$$

对于任何 $K=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in H(n)$,我们定义模糊集

$$\widetilde{B}_k^n = A_{k_1}^{1,n}\cdot A_{k_2}^{2,n}\cdots A_{k_n}^{n,n}. \tag{4.3.10}$$

和实数

$$b_k^n = \max(a_{k_1}^{1,n},a_{k_2}^{2,n},\cdots,a_{k_n}^{n,n}). \tag{4.3.11}$$

显然,$\{\widetilde{B}_k^n;k\in H(n)\}$ 是 X 的一个有限模糊划分. 和对于任何 $k\in H(n)$,$b_k^n\geqslant 0$,以及

$$t_{n_\lambda} = \sum_{k\in H(n)} b_k^n\cdot \widetilde{B}_k^n \tag{4.3.12}$$

是一个非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数,下面我们证明 $\{t_{n_\lambda}^-\}$ 满足(4.3.2)、(4.3.3)和(4.3.4),事实上

(Ⅰ) 如果 $\widetilde{B}_k^n(x)=0$,则

$$(f_\lambda^-(x) - b_k^n)\cdot \widetilde{B}_k^n(x) = 0,$$

如果 $\widetilde{B}_k^n(x)\neq 0$,则对于任何 $i=1,2,\cdots,n$,$\widetilde{A}_{k_i}^{n,k}(x)\neq 0$,由(4.3.6)

知

$$f_{\lambda}^{-}(x) \geqslant f_{i_\lambda}(x) \geqslant a_{k_i}^{i,n}, \quad i=1,2,\cdots,n.\ (x \in X)$$

因此，对于任何 $n=1,2,\cdots,k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in H(n)$ 有

$$f_{\lambda}^{-}(x) \geqslant b_k^n,$$

从而

$$(f_{\lambda}^{-}(x) - b_k^n)\cdot \widetilde{B}_k^n(x) \geqslant 0,\ (x \in X)$$

这样，我们就证明了对于任何的 $n=1,2,\cdots$，有

$$f_{\lambda} \vdash -t_{n_\lambda}^{-}.$$

（Ⅱ）如果 $\widetilde{B}_k^{n+1}(x)\cdot\widetilde{B}_j^n(x)=0$，则

$$(b_k^{n+1} - b_j^n)\cdot\widetilde{B}_k^{n+1}(x)\widetilde{B}_j^n(x) = 0.$$

如果 $\widetilde{B}_k^{n-1}(x)\cdot\widetilde{B}_j^n(x)\neq 0$，则对于任何 $1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$\widetilde{A}_{k_i}^{i,n+1}(x)\cdot\widetilde{A}_{j_i}^{i,n}(x) \neq 0.$$

再由(4.3.7)，我们有对于任何 $1\leqslant i\leqslant n$，

$$a_{k_i}^{i,n+1} \geqslant a_{j_i}^{i,n}.$$

因此

$$\begin{aligned} b_k^{n+1} &= \max(a_{k_1}^{1,n+1}, a_{k_2}^{2,n+1}, \cdots, a_{k_n}^{n,n+1}) \\ &\geqslant \max(a_{j_1}^{1,n}, a_{j_2}^{2,n}, \cdots, a_{j_n}^{n,n}) = b_j^n. \end{aligned}$$

故

$$(b_k^{n+1} - b_j^n)\widetilde{B}_k^{n+1}(x)\cdot\widetilde{B}_j^n(x) \geqslant 0.$$

从而，我们证明了对于任何的 n，

$$t_{n-1_\lambda}^{-} \geqslant t_{n_\lambda},$$

（Ⅲ）因为对于任何 $x\in X, n=1,2,\cdots$，

$$\max(s_{1,n_\lambda}^{-}(x), s_{2,n_\lambda}(x), \cdots, s_{n,n}^{-}(x))$$

$$\leqslant \sum_{k\in H(n)} \max(a_{k_1}^{1,n}, a_{k_2}^{2,n}, \cdots, a_{k_n}^{n,n})\cdot\widetilde{B}_k^n(x) = t_{n_\lambda}(x),$$

所以，对于任何 $x\in X, k=1,2,\cdots$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} t_{n_\lambda}^-(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} s_{k,n_\lambda}(x) = f_{k_\lambda}^-(x).$$

从而，对于任何 $x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty} t_{n_\lambda}^-(x) \geqslant \sup_{k\geqslant 1} f_{k_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x).$$

再由(Ⅰ)和命题 4.3.3 知，对于任何 $x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty} t_{n_\lambda}^-(x) \leqslant f_\lambda^-(x),$$

这样我们就证明了对于任何 $x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty} t_{n_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x).$$

从而我们也完成了该定理的证明.

推论 4.3.2 设 $f_n: X\to[0,+\infty]$，$n=1,2,\cdots$是一个非负广义实值 $\mathscr{B}$ 函数列，如果

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \cdots$$

而存在 $f\in\mathscr{B}^+$，使得对于任何 $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

证明 只要注意到 $\mathscr{B}^+\subset\tilde{\mathscr{B}}^+$ 及 $R\subset\mathscr{F}^+(R)$即可.

定理 4.3.2 设 $\tilde{f}: X\to\mathscr{F}_c^+(R)$是一个模糊值函数，则下面的陈述是等价的：

(1) $\tilde{f}\in\tilde{\mathscr{B}}^+$；

(2) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$存在非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列$\{s_{n_\lambda}^-\}$和$\{s_{n_\lambda}^+\}$满足条件

$$\lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x) \text{ 和} \lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^+(x) = f_\lambda^+(x), (x\in X); \tag{4.3.13}$$

$$s_{n+1_\lambda}^-(x) \geqslant s_{n_\lambda}^-(x) \text{ 和 } s_{n+1_\lambda}^+(x) \geqslant s_{n_\lambda}^+(x), (x\in X, n=1,2,\cdots).$$

证明 因为 $\tilde{f}\in\tilde{\mathscr{B}}^+$，所以对于任何 $\lambda\in(0,1]$ $f_\lambda^-, f_\lambda^+\in\mathscr{B}^+$. 从而存在$\{s_{n_\lambda}^-\}\subset\mathscr{B}^+(f_\lambda^-)$和$\{s_{n_\lambda}^+\}\subset\mathscr{B}^+(f_\lambda^+)$满足

$$s_{n+1_\lambda}^- \geqslant s_{n_\lambda}^- \text{ 和 } s_{n+1_\lambda}^+ \geqslant s_{n_\lambda}^+, n=1,2,\cdots.$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x) \text{ 和} \lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^+(x) = f_\lambda^+(x), (x \in X).$$

再由命题 4.3.1 知

$$s_{n+1_\lambda}^-(x) \geqslant s_{n_\lambda}^-(x) \text{ 和 } s_{n+1_\lambda}^+(x) \geqslant s_{n_\lambda}^+(x), (x \in X, n \in N),$$

故 $\{s_{n_\lambda}^-\}\{s_{n_\lambda}^+\}$ 满足(2)的条件. 反之,如果(2)的假设成立. 让我们考虑 $f_{n_\lambda}^-(x) = s_{n_\lambda}^-(x)$ 和 $f_{n_\lambda}^+(x) = s_{n_\lambda}^+(x)(x \in X, n \in N)$, 则 $\{f_{n_\lambda}^-\}$ 和 $\{f_{n_\lambda}^+\}$ 满足推论 4.3.2 的条件,以及

$$\lim_{n\to\infty} f_{n_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x) \text{ 和} \lim_{n\to\infty} f_{n_\lambda}^+(x) = f_\lambda^+(x) \quad (x \in X).$$

因此对于任何 $\lambda \in (0,1]$ $f_\lambda^-, f_\lambda^+ \in \mathscr{B}^+$, 从而 $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}^+$.

定理 4.3.3 设 $\tilde{f}: X \to \mathscr{F}^*(R)$ 是一个模糊值函数,则下面的陈述是等价的:

(1) $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}$;

(2) 对于任何 $\lambda \in (0,1]$ 存在非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列 $\{s'^-_{n_\lambda}\}$, $\{s'^+_{n_\lambda}\}$, $\{s''^-_{n_\lambda}\}$ 和 $\{s''^+_{n_\lambda}\}$ 满足下列条件:

$$\lim_{n\to\infty} s'^-_{n_\lambda}(x) = (f_\lambda^-)_-(x), \lim_{n\to\infty} s'^+_{n_\lambda}(x) = (f_\lambda^-)_+(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} s''^-_{n_\lambda}(x) = (f_\lambda^+)_-(x), \lim_{n\to\infty} s''^+_{n_\lambda}(x) = (f_\lambda^+)_+(x), (x \in X)$$

和

$$s'^-_{n+1_\lambda}(x) \geqslant s'^-_{n_\lambda}(x), s'^+_{n+1_\lambda}(x) \geqslant s'^+_{n_\lambda}(x),$$

$$s''^-_{n+1_\lambda}(x) \geqslant s''^-_{n_\lambda}(x), s''^+_{n+1_\lambda}(x) \geqslant s''^+_{n_\lambda}(x), n \in N.$$

(3) 对于任何 $\lambda \in (0,1]$ 存在实值简单 $\mathscr{B}$-函数列 $\{s_{n_\lambda}^-\}$ 和 $\{s_{n_\lambda}^+\}$ 使得:

$$f_\lambda^- \models\!\!= s_{n_\lambda}^-, \quad f_\lambda^+ \models\!\!= s_{n_\lambda}^+, n = 1, 2, \cdots$$

和

$$\lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x), \quad \lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^+(x) = f_\lambda^+(x), (x \in X). \tag{4.3.14}$$

证明 只要我们注意到对于任何的 $\lambda \in (0,1]$, 由于 $\tilde{f}: X \to$

$\mathscr{F}^*(R)$，使得 f_λ^- 和 f_λ^+ 都是从 X 到 $[-\infty,+\infty]$ 上广义实值函数，以及 $(f_\lambda^-)_-$，$(f_\lambda^-)_+$，$(f_\lambda^+)_-$，$(f_\lambda^+)_+$ 都是非负的，使用定理4.3.2可知(1)与(2)等价.

现在我们假定(2)成立.证明(3)成立.事实上，因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$ 存在非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列 $\{s'^-_{n_\lambda}\}$，$\{s'^+_{n_\lambda}\}$，$\{s''^-_{n_\lambda}\}$ 和 $\{s''^+_{n_\lambda}\}$ 是单调增加且分别收敛于 $(f_\lambda^-)_-$，$(f_\lambda^-)_+$，$(f_\lambda^+)_-$ 和 $(f_\lambda^+)_+$.同时还有

$$(f_\lambda^-)_- \models s'^-_{n_\lambda}, (f_\lambda^-)_+ \models s'^+_{n_\lambda},$$

$$(f_\lambda^+)_- \models s''^-_{n_\lambda}, (f^+)_+ \models s''^+_{n_\lambda} (n\in N).$$

让我们假设

$$s'^-_{n_\lambda} = \sum_{k\in K(n,\lambda)} a^n_{k_\lambda}\widetilde{A}^n_k,\ s'^+_{n_\lambda} = \sum_{h\in H'(n,\lambda)} b^n_{h_\lambda}\widetilde{B}^n_h,$$

$$s''^-_{n_\lambda} = \sum_{h\in H(n,\lambda)} c^n_{h_\lambda}\widetilde{C}^n_h,\ s''^+_{n_\lambda} = \sum_{k\in K'(n,\lambda)} d^n_{k_\lambda}\widetilde{D}^n_k. \qquad (n\in N)$$

我们考虑

$$s^-_{n_\lambda} = s'^+_{n_\lambda} - s'^-_{n_\lambda},$$

$$s^+_{n_\lambda} = s''^+_{n_\lambda} - s''^-_{n_\lambda}, n\in N.$$

则

$$s^-_{n_\lambda} = \sum_{k\in K(n,\lambda)}\sum_{h\in H'(n,\lambda)} (b^n_{h_\lambda} - a^n_{k_\lambda})\widetilde{A}^n_k\cdot\widetilde{B}^n_h.$$

如果 $b^n_{h_\lambda}-a^n_{k_\lambda}\geqslant 0$，根据 $(f_\lambda^-)_+\models s'^+_{n_\lambda}$ 和 $a^n_{k_\lambda}\geqslant 0$，我们有

$$((f_\lambda^-)_+(x) - (b^n_{h_\lambda} - a^n_{k_\lambda}))\widetilde{A}^n_k(x)\cdot\widetilde{B}^n_h(x)$$

$$\geqslant ((f_\lambda^-)_+(x) - b^n_{h_\lambda})\widetilde{A}^n_k(x)\cdot\widetilde{B}^n_h(x)\geqslant 0.$$

如果 $b^n_{h_\lambda}-a^n_{k_\lambda}\leqslant 0$，根据 $(f_\lambda^-)_-\models s'^-_{n_\lambda}$ 和 $b^n_{h_\lambda}\geqslant 0$，我们有

$$((f_\lambda^-)_-(x) - (a^n_{k_\lambda} - b^n_{h_\lambda}))\widetilde{A}^n_k(x)\widetilde{B}^n_h(x)$$

$$\geqslant ((f_\lambda^-)_-(x) - a^n_{k_\lambda})\widetilde{A}^n_k(x)\widetilde{B}^n_h(x)\geqslant 0.$$

因此，由定义4.3.5知 $f_\lambda^-\models s^-_{n_\lambda}$，$n\in N$，且对于任何 $x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}(x) = \lim_{n\to\infty}(s'^{+}_{n_\lambda}(x) - s'^{-}_{n_\lambda}(x))$$

$$= \lim_{n\to\infty} s'^{+}_{n_\lambda}(x) - \lim_{n\to\infty} s'^{-}_{n_\lambda}(x)$$

$$= (f_\lambda^-)_+(x) - (f_\lambda^-)_-(x) = f_\lambda^-(x).$$

同理可以证明 $f_\lambda^+ \models s_{n_\lambda}^- = s''^{+}_{n_\lambda} - s''^{-}_{n_\lambda}, n\in N$ 以及对于任何 $x\in X$,

$$\lim_{n\to\infty} s^+_{n_\lambda}(x) = f_\lambda^+(x).$$

这样,我们就证明了(3)成立.

下面我们设(3)成立以及对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$s_{n_\lambda} = \sum_{i\in K(n)} a_{n,i_\lambda}\widetilde{A}_{n,i}, s^+_{n_\lambda} = \sum_{j\in H(n)} a_{n,j_\lambda}\widetilde{B}_{n,j}, (n\in N).$$

让我们定义

$$t^-_{n_\lambda} = \sum_{i\in G(n)} e^+_{n,i_\lambda}\cdot\widetilde{E}^n_i, m_{n_\lambda} = \sum_{j\in M(n)} d^+_{n,j_\lambda}\widetilde{D}^n_j,$$

其中 $G(n)=K(1)\times K(2)\times\cdots\times K(n)$, $i=(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in G(n)$, $M(n)=H(1)\times H(2)\times\cdots\times H(n)$, $j=(j_1,j_2,\cdots,j_n)\in M(n)$,我们有

$$e'_{n_{i_\lambda}} = \max(a^-_{1,i_1},\cdots,a^-_{n,i_n}), \widetilde{E}^n_i = \widetilde{A}_{1,i_1}\cdot\widetilde{A}_{2,i_2}\cdot\cdots\cdot\widetilde{A}_{n,i_n},$$

$$d_{n_{i_\lambda}} = \max(b^+_{1,j_1},\cdots,b^+_{n,j_n}), \widetilde{D}^n_j = \widetilde{B}_{1,j_1}\cdot\widetilde{B}_{2,j_2}\cdot\cdots\cdot\widetilde{B}_{n,j_n}.$$

显然,对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $n\in N$, t_{n_λ}, m_{n_λ} 都是非负实值简单 $\mathscr{A}$-函数,且对于任何 $x\in X$, $n\in N$,

$$t^+_{n_\lambda}(x) \geqslant (s_{n_\lambda})^+(x) \text{ 和 } m^-_{n_\lambda}(x) \geqslant (s^+_{n_\lambda})^-(x).$$

进一步地,对于 $x\in X$, $n\in N$,

$$t^+_{n+1_\lambda}(x) = \sum_{i\in G(n+1)} e^-_{n+1,i}\cdot\widetilde{E}^{n+1}_i(x)$$

$$= \sum_{i\in G(n+1)} \max(a^+_{1,i_1}, a^+_{2,i_2},\cdots,a^-_{n,i_n}, a^+_{n+1,i_{n+1}})\widetilde{A}_{1,i_1}(x)\cdots$$

$$\widetilde{A}_{n,i_n}(x)\cdot\widetilde{A}_{n+1,i_{n+1}}(x)$$

$$= \sum_{i\in G(n+1)} (e^-_{n,(i_1,\cdots,i_n)} \vee a^+_{n+1,i_{n+1}})\cdot\widetilde{E}^n_{(i_1,\cdots,i_n)}(x)\cdot\widetilde{A}_{n+1,i_{n+1}}(x)$$

$$\geq \sum_{k\in K(n+1)} \widetilde{A}_{n+1,k}(x) \sum_{i\in G(n)} e^{+}_{n,i}\cdot \widetilde{E}^{n}_{i}(x) = t^{+}_{n_\lambda}(x).$$

同样可证

$$m^{+}_{n+1_\lambda}(x) \geq m^{+}_{n_\lambda}(x).$$

又因为对于任何 $k=1,2,\cdots,n$,

$$(f_\lambda)_+ \vdash\!\!- (s^{-}_{n_\lambda})^+ \text{ 和 } (f^{+}_\lambda)_+ \vdash\!\!- (s^{+}_{n_\lambda})^+,$$

所以对于任何 $n\in N$,我们有

$$(f_\lambda)_+ \vdash\!\!- t^{+}_{n_\lambda} \text{ 和 } (f^{+}_\lambda)_+ \vdash\!\!- m^{+}_{n_\lambda}.$$

下面我们证明

$$\lim_{n\to\infty} t^{+}_{n_\lambda}(x) = (f_\lambda)_+(x).$$

事实上,(Ⅰ)如果 $f^{-}_\lambda(x)\leqslant 0$,则

$$(f_\lambda)_+(x) = 0 \geqslant t^{+}_{n_\lambda}(x) \geqslant 0,\ n \in N.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} t^{+}_{n_\lambda}(x) = (f^{-}_\lambda)_+(x).$$

(Ⅱ)如果 $f^{-}_\lambda(x)>0$,则

$$0 \leqslant (f_\lambda)_+(x) - t^{+}_{n_\lambda}(x) = f_\lambda(x) - t^{-}_{n_\lambda}(x)$$

$$\leqslant f_\lambda(x) - s^{-}_{n_\lambda}(x), (n \in N).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} t^{+}_{n_\lambda}(x) = (f^{-}_\lambda)_+(x).$$

即对于任何 $x\in X$,我们有

$$\lim_{n\to\infty} t^{+}_{n_\lambda}(x) = (f_\lambda)_+(x).$$

同理可证,对于任何 $x\in X$,我们有

$$\lim_{n\to\infty} m^{+}_{n_\lambda}(x) = (f^{+}_\lambda)_+(x).$$

用同样的方法,我们可以构造非负实值简单$\mathscr{B}$-函数列$\{t^{-}_{n_\lambda}\}$和$\{m^{-}_{n_\lambda}\}$使得它们满足

$$\lim_{n\to\infty} t^{-}_{n_\lambda}(x) = (f_\lambda)_-(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} m_{n_\lambda}^-(x) = (f_\lambda^+)_-(x), (x \in X)$$

和

$$t_{n+1_\lambda}^-(x) \geqslant t_{n_\lambda}^-(x), m_{n+1_\lambda}^-(x) \geqslant m_{n_\lambda}^-(x), (x \in X, n \in N)$$

这样，我们就证明了(2)成立，我们也就完成了该定理的证明.

引理 4.3.1 设 $f, g \in \mathscr{B}^+$,

(1) 如果 $h = f + g$ 存在，则 $h \in \mathscr{B}^+$.

(2) 如果 $h = f - g$ 存在，则 $h \in \mathscr{B}$.

证明

(1) 显然.

(2) 因为 $f, g \in \mathscr{B}^+$，所以，我们能够找到满足(4.3.2)、(4.3.3)和(4.3.4)的非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列$\{s_n'\}$和$\{s_n''\}$. 让我们记

$$s_n = s_n' - s_n'', \quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中 $s_n' = \sum_{k \in K(n)} b_k^n \cdot \widetilde{B}_k^n, s_n'' = \sum_{j \in J(n)} c_j^n \cdot \widetilde{C}_j^n$. 则我们有

$$s_n = \sum_{k \in K(n)} \sum_{j \in J(n)} (b_k^n - c_j^n) \widetilde{B}_k^n \cdot \widetilde{C}_j^n.$$

如果 $b_k^n - c_j^n \geqslant 0$，则由 $h_+(x) \geqslant f(x)$ 和 $f \models s_n'$ 知

$$\begin{aligned}
&(h_+(x) - (b_k^n - c_j^n)) \cdot \widetilde{B}_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_j^n(x) \\
&\geqslant (h_+(x) - b_k^n) \cdot B_k^n(x) \widetilde{C}_j^n(x) \\
&\geqslant (f(x) - b_k^n) \cdot B_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_j^n(x) \geqslant 0;
\end{aligned}$$

如果 $b_k^n - c_j^n \leqslant 0$，则由 $h_-(x) \geqslant g(x)$ 和 $g \models s_n''$ 知

$$\begin{aligned}
&(h_-(x) - (c_j^n - b_k^n)) \cdot \widetilde{B}_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_j^n(x) \\
&\geqslant (h_-(x) - c_j^n) \widetilde{B}_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_j^n(x) \\
&\geqslant (g(x) - c_j^n) \widetilde{C}_j^n(x) \cdot \widetilde{B}_k^n(x) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此，

$$h \models s_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

又由于

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(s_n'(x) - s_n''(x))$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_n'(x) - \lim_{n\to\infty} s_n''(x)$$
$$= f(x) - g(x) - h(x).$$

这样,我们由定理 4.3.3 知 $h \in \mathscr{B}$.

定理 4.3.4 设 $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathscr{B}}$,如果 $\tilde{f} + \tilde{g}$ 存在,则 $\tilde{f} + \tilde{g} \in \tilde{\mathscr{B}}$.

证明 要证明 $\tilde{f} + \tilde{g} \in \tilde{\mathscr{B}}$,就是要证明对于任何 $\lambda \in (0,1]$ $(\tilde{f} + \tilde{g})_\lambda^-$, $(\tilde{f} + \tilde{g})_\lambda^+ \in \mathscr{B}$. 事实上,由于 $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathscr{B}}$,所以对于任何 $\lambda \in (0,1]$, $f_\lambda^-, f_\lambda^+, g_\lambda^-, g_\lambda^+ \in \mathscr{B}$.

又由于

$$(\tilde{f} + \tilde{g})_\lambda^- = f_\lambda^- + g_\lambda^-$$
$$= [(f_\lambda^-)_+ + (g_\lambda^-)_+] - [(f_\lambda^-)_- + (g_\lambda^-)_-];$$
$$(\tilde{f} + \tilde{g})_\lambda^+ = f_\lambda^+ + g_\lambda^+$$
$$= [(f_\lambda^+)_+ + (g_\lambda^+)_+] - [(f_\lambda^+)_- + (g_\lambda^+)_-],$$

以及 $(f_\lambda^-)_+, (f_\lambda^-)_-, (f_\lambda^+)_+, (f_\lambda^+)_-, (g_\lambda^-)_+, (g_\lambda^-)_-, (g_\lambda^+)_+, (g_\lambda^+)_- \in \mathscr{B}^+$,所以我们由引理 4.3.1 知

$$(f_\lambda^-)_+ + (g_\lambda^-)_+ \in \mathscr{B}^+, (f_\lambda^-)_- + (g_\lambda^-)_- \in \mathscr{B}^+,$$
$$(f_\lambda^+)_+ + (g_\lambda^+)_+ \in \mathscr{B}^+, (f_\lambda^+)_- + (g_\lambda^+)_- \in \mathscr{B}^+.$$

再由引理 4.3.1 我们得到

$$(\tilde{f} + \tilde{g})_\lambda^- \in \mathscr{B}, (\tilde{f} + \tilde{g})_\lambda^+ \in \mathscr{B}.$$

定理 4.3.5 设 $\tilde{f} \in \mathscr{B}$, $\tilde{\alpha} \in \mathscr{F}^*(R)$, $\tilde{\alpha} \geqslant 0$ 或 $\tilde{\alpha} \leqslant 0$,如果 $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{f}$ 存在,则 $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}$.

证明 我们仅仅就 $\tilde{\alpha} \geqslant 0$ 证明,当 $\tilde{\alpha} \leqslant 0$,我们可以类似证明. 事实上,当 $\tilde{\alpha} \geqslant 0$ 时,对于任何 $\lambda \in (0,1]$, $\alpha_\lambda^+ \geqslant \alpha_\lambda^- \geqslant 0$,所以

$$(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{f})(x) = \tilde{\alpha} \cdot \tilde{f}(x) = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda[\alpha_\lambda^- \cdot f_\lambda^-(x), \alpha_\lambda^+ f_\lambda^+(x)]$$

假设 $f_\lambda^- = (f_\lambda^-)_+ - (f_\lambda^-)_-$, $f_\lambda^+ = (f_\lambda^+)_+ - (f_\lambda^+)_-$,所以

$$\alpha_\lambda^- \cdot f_\lambda(x) = \alpha_\lambda^- \cdot (f_\lambda^-)_+(x) - \alpha_\lambda^-(f_\lambda^-)_-(x),$$
$$\alpha_\lambda^+ \cdot f_\lambda^+(x) = \alpha_\lambda^+(f_\lambda^+)_+(x) - \alpha_\lambda^+ \cdot (f_\lambda^+)_-(x).$$

因为 $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}$，所以，$(f_\lambda^-)_+ \in \mathscr{B}^+$，因此，我们能够找到满足(4.3.2)、(4.3.3)和(4.3.4)的非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列$\{s_n\}$，让我们记

$$s_n = \sum_{k \in K(n)} a_k^n \widetilde{B}_k^n.$$

从而，由 $\alpha_\lambda^- \geqslant 0$，$(f_\lambda^-)_+ \vdash s_n\ n=1,2,\cdots$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_\lambda^- \cdot s_n(x) = \alpha_\lambda^- \cdot (f_\lambda^-)_-(x).$$

$$(\alpha_\lambda^-(f_\lambda^-)_+(x) - \alpha_\lambda^- a_k^n)\widetilde{B}_k^n(x)$$
$$= \alpha_\lambda^-((f_\lambda^-)_+(x) - a_k^n)\widetilde{B}_k^n(x) \geqslant 0.$$

这样 $\qquad \alpha_\lambda^-(f_\lambda^-)_- \vdash \alpha_\lambda^- s_n, n=1,2,\cdots.$

又由于 $s_{n+1} \geqslant s_n$，所以

$$(\alpha_\lambda^- \cdot a_k^{n+1} - \alpha_\lambda^- \cdot a_j^n)\widetilde{B}_k^{n+1}(x) \cdot \widetilde{B}_j^n(x)$$
$$= \alpha_\lambda^-(a_k^{n+1} - a_j^n)\widetilde{B}_k^{n+1}(x)\widetilde{B}_j^n(x) \geqslant 0$$

即 $\alpha_\lambda^- s_{n+1} \geqslant \alpha_\lambda^- s_n$，故 $\alpha_\lambda^-(f_\lambda^-)_+ \in \mathscr{B}^+$。

同理可证 $\alpha_\lambda^- \cdot (f_\lambda^-)_-$，$\alpha_\lambda^+ \cdot (f_\lambda^+)_-$，$\alpha_\lambda^+ \cdot (f_\lambda^+)_- \in \mathscr{B}^+$，再由引理 4.3.1 知 $\alpha_\lambda^- \cdot f_\lambda \in \mathscr{B}$，$\alpha_\lambda^+ \cdot f_\lambda^+ \in \mathscr{B}$. 从而我们证明了 $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}$.

引理 4.3.2 设 $f, g \in \mathscr{B}^+$，则 $h = \max(f, g) \in \mathscr{B}^+$ 和 $y = \min(f, g) \in \mathscr{B}^+$.

证明 我们只证明 $h \in \mathscr{B}$. 事实上 $h(x) = (f - g)_+(x) + g(x)(x \in X)$，然后利用引理 4.3.1 知 $h \in \mathscr{B}^+$.

定理 4.3.6 设 $\{\tilde{f}_n\} \subset \tilde{\mathscr{B}}$，如果对于任何 $x \in X$，$\{\tilde{f}_n(x)\} \in \Lambda^*$，则 $\tilde{g} = \sup\limits_{n\geqslant 1} \tilde{f}_n$，$\tilde{h} = \inf\limits_{n\geqslant 1} \tilde{f}_n \in \tilde{\mathscr{B}}$.

证明 我们只证明 $\tilde{g} \in \tilde{\mathscr{B}}$，$\tilde{h} \in \tilde{\mathscr{B}}$类似可证. 事实上，我们记

$$\tilde{g}_n(x) = \max(\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \cdots, \tilde{f}_n(x)), \quad x \in X,$$

则$(g_{n_\lambda}^-)_+(x) = \max((f_{1_\lambda}^-)_+(x), (f_{2_\lambda}^-)_+(x), \cdots, (f_{n_\lambda}^-)_+(x))$由引理4.3.2知$(g_{n_\lambda}^-)_+ \in \mathscr{B}^+$，又由于

$$0 \leqslant (g_{n_\lambda})_+(x) \leqslant (g_{n+1_\lambda})_+(x), n = 1,2,\cdots, x \in X,$$

和存在$\tilde{g}: X \to \mathscr{F}^*(R)$使得

$$(g_\lambda^-)_+(x) = \lim_{n\to\infty}(g_{n_\lambda}^-)_+(x).$$

由推论4.3.2知$(g_\lambda^-)_+ \in \mathscr{B}^+$.

我们同理可以证明$(g_\lambda^-)_-$，$(g_\lambda^+)_+$和$(g_\lambda^+)_- \in \mathscr{B}^+$. 再由引理4.3.1知，对于任何$\lambda \in (0,1]$，

$$g_\lambda^- = (g_\lambda^-)_+ - (g_\lambda^-)_- \in \mathscr{B}, g_\lambda^+ = (g_\lambda^+)_+ - (g_\lambda^+)_- \in \mathscr{B}$$

这样我们就证明了$\tilde{g} = \sup_{n\geq 1} \tilde{f}_n \in \tilde{\mathscr{B}}$.

推论 4.3.3 设$\tilde{f}_i \in \tilde{\mathscr{B}}, i = 1,2,\cdots,n$，则$\max(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n)$，$\min(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\cdots,\tilde{f}_n) \in \tilde{\mathscr{B}}$.

证明 显然.

推论 4.3.4 设$\{\tilde{f}_n\} \subset \tilde{\mathscr{B}}$，如果对于任何$x \in X$，$\{\tilde{f}_n(x)\} \in A^*$，则存在$\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}$使得，对于任何$x \in X$

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x).$$

证明 显然.

4.3.3 可测函数与模糊值$\mathscr{B}$-函数的关系

定义 4.3.8

(a) 设$\tilde{f}: X \to \mathscr{F}^*(R)$是一个模糊值函数，$\tilde{E} \in \mathscr{F}(X)$，对于任何$\lambda \in (0,1]$，模糊集合$(f_\lambda^-)^{-1}(\tilde{E})$和$(f_\lambda^+)^{-1}(\tilde{E})$分别被定义为

$$(f_\lambda^-)^{-1}(\tilde{E})(x) = \tilde{E}(f_\lambda^-(x)),$$

$$(f_\lambda^+)^{-1}(\tilde{E})(x) = \tilde{E}(f_\lambda^-(x)), (x \in X)$$

(b) 设 $s=\sum_{i=1}^{n}a_i\widetilde{A}_i$ 是一个实值简单函数, $\widetilde{E}\in\mathscr{F}(R)$, 模糊集 $s^{-1}(\widetilde{E})$ 被定义为

$$s^{-1}(\widetilde{E})(x)=\widetilde{E}(s(x)),\ x\in X,$$

以及模糊集 $s^{+1}(\widetilde{E})$ 被定义为

$$s^{+1}(\widetilde{E})(x)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{E}(a_i)\cdot\widetilde{A}_i(x),\ x\in X.$$

命题 4.3.6

(a) $s^{+1}(\widetilde{E})=\bigoplus_{i=1}^{n}\widetilde{E}(a_i)\widetilde{A}_i$;

(b) 如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{P}(R)$, 则 $s^{+1}(\widetilde{E})=\bigoplus_{a_i\in\widetilde{E}}\widetilde{A}_i$; 进一步地, 如果 $\widetilde{E},\widetilde{A}_i\in\mathscr{P}(R)$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $s^{+1}(\widetilde{E})=s^{-1}(\widetilde{E})$;

证明 显然.

注 4.3.6 $s^{-1}(\widetilde{E})$ 和 $s^{+1}(\widetilde{E})$ 一般是不一致的, 例如, 我们设 $X=\{1,2\}$, $\widetilde{A}_1(x)=1/x$, $\widetilde{A}_2(x)=(x-1)/x$, $s=1\widetilde{A}_1+5\widetilde{A}_2$, $\widetilde{E}=[5,+\infty)$, 则

$$s^{-1}(\widetilde{E})=\varnothing,\qquad s^{-1}(\widetilde{E})=\widetilde{A}_2\neq\varnothing.$$

命题 4.3.7 设 $s=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\widetilde{A}_i$ 是一个实值简单函数, 则下列陈述是等价的:

(a) $s\in\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$;

(b) 对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{P}(R)$, $s^{-1}(\widetilde{E})\in\mathscr{G}$;

(c) 对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{P}(R)$ 且 $\widetilde{E}$ 是闭集, $s^{+}(\widetilde{E})\in\mathscr{G}$. 如果 $\mathscr{G}$ 是包含常模糊集, 则(a), (b), (c)还等价于(d).

(d) 对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}(R)$, $s^{+}(\widetilde{E})\in\mathscr{G}$;

证明 由命题 4.3.6 可以证明.

下面我们设 $\mathscr{G}$ 是一个模糊集合的 σ-代数, 记

$$\mathscr{G}_0=\mathscr{G}\cap\mathscr{P}(X),$$

显然 $\mathscr{G}_0$ 是一个经典集合的 σ-代数，

定理 4.3.7 设 $\tilde{f}:X\to\mathscr{X}^*(R)$ 是一个模糊值函数，则下列陈述是等价的：

(a) $\tilde{f}\in\tilde{M}$；

(b) $\tilde{f}\in\tilde{M}_0$；

(c) $\tilde{f}\in\tilde{\mathscr{B}}_0$，

其中 $\tilde{\mathscr{B}}_0$ 表示关于 $\mathscr{G}_0$ 的模糊值 $\mathscr{B}$-函数的集合，$\tilde{M}_0$ 表示关于 $(X,\mathscr{G}_0)$ 可测的模糊值函数的集合.

证明 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，$\chi_{\{x;f_\lambda^-(x)\geq\alpha\}}\in\mathscr{G}$ 等价于 $\{x;f_\lambda^-(x)\geq\alpha\}\in\mathscr{G}_0$，$\chi_{\{x;f_\lambda^+(x)\geq\alpha\}}\in\mathscr{G}$ 等价于 $\{x;f_\lambda^+(x)\geq\alpha\}\in\mathscr{G}_0$，所以，$\tilde{f}\in\tilde{M}$ 与 $\tilde{f}\in\tilde{M}_0$ 是等价的. 下面我们证明(b)与(c)等价. 我们只要证明对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$(f_\lambda^-)_+\in M_0^+$，$(f_\lambda^-)_-\in M_0^+$，$(f_\lambda^+)_+\in M_0^+$，$(f^{+})\ \in M_0^-$ 分别与 $(f_\lambda^-)_+\in\mathscr{B}_0^+$，$(f_\lambda^-)_-\in\mathscr{B}_0^+$，$(f_\lambda^+)_+\in\mathscr{B}_0^+$，$(f_\lambda^+)\ \in\mathscr{B}_0^+$ 等价即可. 下面我们证明 $(f_\lambda^-)_+\in M_0^+$ 等价于 $(f_\lambda^-)_+\in\mathscr{B}_0^+$，其中 M_0^+ 和 $\mathscr{B}_0^+$ 分别表示关于 $(X,\mathscr{G}_0)$ 的非负广义实值可测函数的集合和非负广义实值 $\mathscr{B}$-函数的集合. 其它情况，我们可以类似证明. 事实上，如果 $(f_\lambda^-)_+\in M_0^+$，则由[1]的 § 20 定理 B，存在非负实值简单可测函数列 $\{t_n\}$，使得 $t_{n+1}(x)\geq t_n(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n(x)=(f_\lambda^-)_+(x)$，$x\in X$，$n=1,2,\cdots$. 让我们考虑 t_n 的值

$$a_1^n<a_2^n<\cdots<a_{k(n)}^n \text{ 和}$$

$$\tilde{A}_i^n=t_n^{-1}(\{a_i^n\}),i=1,2,\cdots,k(n),n=1,2,\cdots.$$

则

$$s_n=((\tilde{A}_1^n,\tilde{A}_2^n,\cdots,\tilde{A}_{k(n)}^n),(a_1^n,a_2^n,\cdots,a_{k(n)}^n))$$

是一个非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数，且

$$(f_\lambda^-)_+\mid\!-s_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$s_{n-1} \geqslant s_n \geqslant 0, \quad n = 1,2,\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} t_n(x) = (f_\lambda^-)_+ (x), (x \in X),$$

因此,$(f_\lambda)_- \in \mathscr{B}_0^+$.

反之,如果$(f_\lambda)_- \in \mathscr{B}_0^-$,则存在非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列$\{s_n\}$使得

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = (f_\lambda^-)_+ (x), \ (x \in X).$$

根据命题 4.3.6,$s_n(x)$是可测的,所以,$(f_\lambda)_+$是非负实值可测函数列的极限,因此,由推论 4.1.1 知$(f_\lambda)_+ \in M_0^+$.

定理 4.3.8 设 $\tilde{f} \in \tilde{M}$,则 $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}$.

证明 我们只须就 $\tilde{f}(x) \geqslant 0 (x \in X)$的情况证明,事实上,如果 $\tilde{f} \in \tilde{M}^+$,则由定理 4.3.7 知 $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}_0^-$. 因此,我们能够对于任何 $\lambda \in (0,1]$找到关于 $\mathscr{G}_0$ 的非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数列$\{s_{n_\lambda}^-\}$和$\{s_{n_\lambda}^-\}$,使得

$$f_\lambda^- \geqslant s_{n_\lambda}^-, \quad f_\lambda^+ \geqslant s_{n_\lambda}^+, \ n = 1,2,\cdots$$

$$s_{n+1_\lambda}^- \geqslant s_{n_\lambda}, \quad s_{n+1_\lambda}^+ \geqslant s_{n_\lambda}^-, \ n = 1,2,\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^-(x) = f_\lambda^-(x), \quad \lim_{n\to\infty} s_{n_\lambda}^+(x) = f_\lambda^+(x), (x \in X).$$

又因为 $\mathscr{G}_0 \subset \mathscr{G}$,所以任何关于 $\mathscr{G}_0$ 的非负实值简单 $\mathscr{B}$ 函数都是关于 $\mathscr{G}$ 的非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数,因此 $f_\lambda^-, f_\lambda^- \in \mathscr{B}^+$. 也就是说 $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{B}}^+$. 这样我们就完成了该定理的证明.

第5章　模糊值积分

5.1　模糊值$\mathscr{B}$-函数的模糊值积分的定义

5.1.1　实值简单$\mathscr{B}$-函数关于实值测度的积分

设$\mathscr{G}$是一个X上的模糊集合代数，μ_0是定义在$\mathscr{G}$上的一个实值测度.

定义 5.1.1　设$s=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\widetilde{A}_i\in\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$，$\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，我们说$s$在$\widetilde{A}$上是$\mu_0$-可积的，如果对于任何指标$i$，$1\leqslant i\leqslant n$有

$$\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A})=+\infty\Rightarrow\quad a_i=0.$$

如果s是在$\widetilde{A}$上μ_0-可积的，我们记

$$\int_{\widetilde{A}}s\mathrm{d}\mu_0=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A}),$$

则称它为s在$\widetilde{A}$上的μ_0-积分，当$\widetilde{A}=X$时，我们简单记为$\int s\mathrm{d}\mu_0$.

命题 5.1.1

(a) 如果$s\sim_{\widetilde{A}}0$，则s在$\widetilde{A}$上是μ_0-可积的；

(b) 如果$\mu_0(X)<+\infty$，则任何实值简单$\mathscr{B}$函数都是μ_0-可积的；

(c) 如果$s_1\geqslant_{\widetilde{A}}s_2$，则$\int_{\widetilde{A}}s_1\mathrm{d}\mu_0\geqslant\int_{\widetilde{A}}s_2\mathrm{d}\mu_0$；

(d) 如果$s_1\sim_{\widetilde{A}}s_2$，则$\int_{\widetilde{A}}s_1\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}s_2\mathrm{d}\mu_0$.

(e) $\int_{\widetilde{A}}s_1\mathrm{d}\mu_0=\int s_1\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu_0$

证明 $(a)(b)$显然成立. 下面我们只证明(c). 事实上,设 $s_1 = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \widetilde{A}_i$, $s_2 = \sum_{j=1}^{q} b_j \cdot \widetilde{B}_j$,如果 $s_1 \geqslant_A s_2$,则对于任何使 $\widetilde{A}(x) \neq 0$ 的点 x 和任何指标对 i,j,$i=1,2,\cdots,p$,$j=1,2,\cdots,q$,有

$$(a_i - b_j)\widetilde{A}_i(x) \cdot \widetilde{B}_j(x) \geqslant 0.$$

从而对于 $\widetilde{A}_i(x) \cdot \widetilde{B}_j(x) \cdot \widetilde{A}(x) \neq 0$ 的点 x,我们有

$$a_i \geqslant b_j, \quad s_1(x) \geqslant s_2(x)$$

因此,对于任何 $i=1,2,\cdots,p$,$j=1,2,\cdots,q$,有

$$a_i \cdot \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}) \geqslant b_j \cdot \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}).$$

这样

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_i \cdot \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}) \geqslant \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} b_j \cdot \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}).$$

又由于

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_i \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}) &= \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{j=1}^{q} \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}) \\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_0(\bigoplus_{j=1}^{q} (\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A})) = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A} \cdot X) \\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A})
\end{aligned}$$

和

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} b_j \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mu_0(\widetilde{B}_j \cdot \widetilde{A}),$$

知结论成立.

定理 5.1.1 设 $s_1 = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \widetilde{A}_i \in \mathscr{B}_{\mathscr{G}}$, $s_2 = \sum_{j=1}^{q} b_j \cdot \widetilde{B}_j \in \mathscr{B}_{\mathscr{G}}$, $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{A}_k \in \mathscr{G}$, $k = 1,2,\cdots$, $\alpha \in R$,则

(a) 如果 $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ 和 s_1 是在 $\widetilde{B}$ 上 μ_0-可积的,则 s_1 在 $\widetilde{A}$ 上也是 μ_0-可积的. 如果 $s_1 \geqslant_{\widetilde{A}} 0$,则

$$\int_{\widetilde{A}} s_1 \mathrm{d}\mu_0 \leqslant \int_{\widetilde{B}} s_1 \mathrm{d}\mu_0;$$

(*b*) 如果 $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \cdots, \widetilde{B}_k$ 是 $\widetilde{B}$ 的有限模糊划分，s_1 是 $\widetilde{B}$ 上 μ_0-可积的，则

$$\int_{\widetilde{B}} s_1 \mathrm{d}\mu_0 = \sum_{i=1}^{k} \int_{\widetilde{B}_i} s_1 \mathrm{d}\mu_0;$$

(*c*) 如果 s 是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，且存在一个单调增序列 $\{\widetilde{A}_k\} \subset \mathscr{G}$，使得 $\widetilde{A} = \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_k$，则

$$\int_{\widetilde{A}} s_1 \mathrm{d}\mu_0 = \lim_{k\to\infty} \int_{\widetilde{A}_k} s_1 \mathrm{d}\mu_0$$

(*d*) 如果 $\{\widetilde{A}_k\} \subset \mathscr{G}$ 是一个单调减小序列，$\widetilde{A} = \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_k$，$s_1$ 是在 $\widetilde{A}_1$ 上 μ_0-可积的，则

$$\int_{\widetilde{A}} s_1 \mathrm{d}\mu_0 = \lim_{k\to\infty} \int_{\widetilde{A}_k} s_1 \mathrm{d}\mu_0;$$

(*e*) 如果 s_1 和 s_2 在 $\widetilde{A}$ 上都是 μ_0-可积的，则 $s_1 + s_2, \alpha \cdot s_1$ 在 $\widetilde{A}$ 上都是 μ_0-可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}} (s_1 + s_2) \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} s_1 \mathrm{d}\mu_0 + \int_{\widetilde{A}} s_2 \mathrm{d}\mu_0;$$

$$\int_{\widetilde{A}} (\alpha \cdot s_1) \mathrm{d}\mu_0 = \alpha \cdot \int_{\widetilde{A}} s_1 \mathrm{d}\mu_0.$$

证明

(*a*) 因为 s_1 是在 $\widetilde{B}$ 上 μ_0-可积的，和 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$，所以

$$\mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A}) = +\infty \Rightarrow \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}) = +\infty \Rightarrow a_i = 0.$$

故 s_1 是 $\widetilde{A}$ 上的 μ_0-可积实值简单 $\mathscr{B}$-函数. 进一步地，如果 $s_1 \geqslant_{\widetilde{A}} 0$，则对于使 $\widetilde{A}(x) \neq 0$ 的点 x 有 $a_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, p$. 从而

$$\int_{\widetilde{A}} s_1 \mathrm{d}\mu_0 = \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mu_0(\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{B}) = \int_{\widetilde{B}} s_1 \mathrm{d}\mu_0.$$

(*b*) 由 (*a*) 知 s_1 是在 $\widetilde{B}_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 上 μ_0-可积的，又由于

$\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2,\cdots,\widetilde{B}_k$ 是 $\widetilde{B}$ 的有限模糊划分，所以它们是不交的，且 $\widetilde{B}=\bigoplus_{j=1}^{k}\widetilde{B}_j$. 因此，对于任何 $i=1,2,\cdots,p$，

$$\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B})=\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\bigoplus_{j=1}^{k}\widetilde{B}_j)=\sum_{j=1}^{k}\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j).$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{B}}s_1\mathrm{d}\mu_0&=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B})\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot\sum_{j=1}^{k}\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j)\\&=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{p}a_i\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j)\\&=\sum_{j=1}^{k}\int_{\widetilde{B}_j}s_1\mathrm{d}\mu_0.\end{aligned}$$

(c) 因为 $\widetilde{A}_k\subset\widetilde{A},k=1,2,\cdots$，所以，由 s_1 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积知 s_1 在 $\widetilde{A}_k$ 上也是 μ_0-可积的，$k=1,2,\cdots$. 又由于 $\widetilde{A}=\lim\limits_{k\to\infty}\widetilde{A}_k$，所以，对于任何 $i=1,2,\cdots,p$，$\{\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A}_k\}_{k\in N}$ 单调增加收敛于 $\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A}$. 因此，

$$\lim_{k\to\infty}\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A}_k)=\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A}).$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{\widetilde{A}_k}s_1\mathrm{d}\mu_0&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A}_k)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot\lim_{k\to\infty}\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A}_k)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i\cdot\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A})=\int_{\widetilde{A}}s_1\mathrm{d}\mu_0.\end{aligned}$$

(d) 类似于(c)可以证明.

(e) 因为 $s_1+s_2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\cdot\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j$，所以由 s_1 和 s_2

都是 $\widetilde{A}$ 上 μ_0 可积的可知，

$$\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})=+\infty\to\begin{cases}\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A})=+\infty\Rightarrow a_i=0;\\ \mu_0(\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})=+\infty\Rightarrow b_j=0.\end{cases}$$

故

$$\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})=+\infty\Rightarrow a_i+b_j=0\text{ 及 }\alpha\cdot a_i=0.$$

所以，s_1+s_2 和 $\alpha\cdot s_1$ 都是 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，且

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{A}}(s_1+s_2)\mathrm{d}\mu_0\\ &=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})\\ &=\sum_{i=1}^{p}a_i\Big(\sum_{j=1}^{q}\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})\Big)+\sum_{j=1}^{q}b_j\Big(\sum_{i=1}^{p}\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})\Big)\\ &=\sum_{i=1}^{p}a_i\mu_0\Big(\bigoplus_{j=1}^{q}(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})\Big)+\sum_{j=1}^{q}b_j\mu_0\Big(\bigoplus_{i=1}^{p}(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})\Big)\\ &=\sum_{i=1}^{p}a_i\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A})+\sum_{j=1}^{q}b_j\cdot\mu_0(\widetilde{B}_j\cdot\widetilde{A})\\ &=\int_{\widetilde{A}}s_1\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}s_2\mathrm{d}\mu_0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}(\alpha\cdot s_1)\mathrm{d}\mu_0&=\sum_{i=1}^{p}(\alpha\cdot a_i)\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A})=\alpha\sum_{i=1}^{p}a_i\mu_0(\widetilde{A}_i\cdot\widetilde{A})\\ &=\alpha\cdot\int_{\widetilde{A}}s_1\mathrm{d}\mu_0.\end{aligned}$$

定理 5.1.2 如果 $t_n=\sum\limits_{i=1}^{k(n)}a_i^n\cdot\widetilde{A}_i^n$，$n=1,2,\cdots$，是一个非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数单调增加序列，$t=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\cdot\widetilde{A}_i$ 是一个非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数，且 t 和 t_n，$n=1,2,\cdots$，都是 μ_0-可积的以及 t 在 $\widetilde{A}$ 上弱于 $\mathscr{B}$-函数 $z(x)=\lim\limits_{n\to\infty}t_n(x)$，$(x\in X)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} t_n \mathrm{d}\mu_0 \geqslant \int_{\widetilde{A}} t \mathrm{d}\mu_0.$$

证明 让我们记

$$K_n = \{1,2,\cdots,k(n)\}, K = \{1,2,\cdots,k\}, I_n = K_n \times K.$$

显然，$\{\widetilde{C}_{i,j}^n; \widetilde{C}_{i,j}^n = \widetilde{A}_i^n \cdot \widetilde{A}_j, (i,j) \in I_n\}$是 X 的一个有限模糊划分. 让我们考虑如下定义的实值简单 $\mathscr{B}$-函数：

$$s_n = \sum_{(i,j)\in I_n} a_i^n \cdot C_{i,j}^n \quad 和 \quad s = \sum_{(i,j)\in I_n} a_j \cdot C_{i,j}^n, \quad (n \in N).$$

我们不难看到，s 和 $s_n(n\in N)$都是非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数且它们是 μ_0-可积的以及

$$\int_{\widetilde{A}} s \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} t \mathrm{d}\mu_0, \quad \int_{\widetilde{A}} s_n \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} t_n \mathrm{d}\mu_0, \quad (n \in N).$$

显然，$z(x)=\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) (x\in X)$和 s 是在 $\widetilde{A}$ 上弱于 z 的. 因此，我们只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n \mathrm{d}\mu_0 \geqslant \int_{\widetilde{A}} s \mathrm{d}\mu_0$$

即可. 事实上，因为 t 在 $\widetilde{A}$ 上弱于 z，所以，对于任何 $x\in X$ 及 $1\leqslant i \leqslant K$ 有

$$(z(x) - a_i)\widetilde{A}_i(x) \cdot \widetilde{A}(x) \geqslant 0.$$

不失一般性，我们能够假设 $\widetilde{A}_j \neq \varnothing (j\in K)$和 $\widetilde{A}_i^n \neq \varnothing (i\in K_n, n\in N)$. 因为 $\sum\limits_{i\in K}\widetilde{A}_i(x) = 1 (x \in X)$，所以，对于任何使 $\widetilde{A}(x)\neq 0$ 的 $x\in X$ 存在 $j\in K$ 使得

$$z(x) \geqslant a_j \geqslant 0.$$

让我们记

$$K(x) = \{j \in K; \widetilde{A}_j(x) \neq 0\}.$$

显然，对于任何 $x\in X$，$K(x)\neq\varnothing$，且对于 $\widetilde{A}(x)\neq 0$ 的 x 有

$$z(x) \geqslant a_j \geqslant 0, \ j \in K(x).$$

下面，我们分两种情况讨论：

(1) 对于每一个 $j\in K$，我们有 $a_j=0$. 在这种情况下，$s(x)=0$ $(x\in X)$和 $\int_{\widetilde{A}} s\mathrm{d}\mu_0=0$. 因为

$$a_i^n\geqslant 0,\ n\in N, i\in K_n.$$

所以，$\int_{\widetilde{A}} s\mathrm{d}\mu_0=0\leqslant\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0\geqslant\int_{\widetilde{A}} s\mathrm{d}\mu_0.$$

(2) 存在 $j\in K$ 使得 $a_j\neq 0$. 在这种情况下，我们记

$$\alpha=\min\{a_j; a_j>0\}.$$

令 ε 是在$(0,\alpha)$中任取的，这样，我们可以推出

$$j\in K(x)\Rightarrow z(x)>a_j-\varepsilon,\ (\widetilde{A}(x)\neq 0)$$

因为 $z(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)(x\in X)$，所以，存在 $n_0=n(x,\varepsilon)$使得

$$s_{n_0}(x)>a_j-\varepsilon,(j\in K(x),\widetilde{A}(x)\neq 0).$$

又因为$\{s_n\}$是一个单调增加的实值简单 $\mathscr{B}$-函数序列，所以，

$$s_{n+1}(x)\geqslant s_n(x),\ (x\in X, n\in N).$$

从而，当 $n\geqslant n(x,\varepsilon)$时

$$s_n(x)\geqslant a_j-\varepsilon,\quad (j\in K(x),\ \widetilde{A}(x)\neq 0).$$

如果存在 $j\in K(x)$，$\widetilde{A}(x)\neq 0$ 使得对于任何 $i\in K_n$，$n\geqslant n(x,\varepsilon)$有

$$a_i^n\leqslant a_j-\varepsilon.$$

则

$$s_n(x)=\sum_{i\in K_n}a_i^n\cdot\widetilde{A}_i^n(x)\leqslant a_j-\varepsilon.$$

产生矛盾！因此，当 $n\geqslant n(\varepsilon)=\inf\{n(x,\varepsilon);\widetilde{A}(x)\neq 0\}$时

$$J_n=\{(i,j)\in I_n;\ a_i^n>a_j-\varepsilon\}\neq\varnothing.$$

让我们如下定义模糊集合 $\widetilde{M}_n$：

$$\widetilde{M}_n=\begin{cases}\varnothing, & \text{当 } n<n(\varepsilon).\\ \bigoplus\limits_{(i,j)\in J_n}\widetilde{C}_{i,j}^n, & \text{当 } n\geqslant n(\varepsilon).\end{cases}$$

因为$\mathscr{G}$是模糊集的σ-代数和$\widetilde{C}^n_{i,j}\in\mathscr{G}$,所以,对于任何$n\in N$,$\widetilde{M}_n\in\mathscr{G}$.

(i) 我们首先证明$\{\widetilde{M}_n\}$是一个单调增加的模糊集合序列. 事实上,当$n<n(\varepsilon)$时,$\widetilde{M}_n=\varnothing\subset\widetilde{M}_{n+1}$;当$n\geqslant n(\varepsilon)$时,因为$s_{n+1}\geqslant s_n$,我们有

$$(a^{n+1}_h-a^n_i)\cdot\widetilde{A}^{n+1}_h(x)\cdot\widetilde{A}^n_i(x)\cdot\widetilde{A}(x)\geqslant 0,$$

对于任何$i\in K_n,h\in K_{n+1}$和$x\in X$成立. 如果$\widetilde{M}_n(x)=0$,显然有$\widetilde{M}_n(x)\leqslant\widetilde{M}_{n+1}(x)$. 如果$\widetilde{M}_n(x)\neq 0$. 则我们能够在$J_n$中找到序对$(i,j)$使得$\widetilde{C}^n_{i,j}(x)\neq 0$. 即

$$\widetilde{A}^n_i(x)\neq 0\text{ 和 }\widetilde{A}_j(x)\neq 0.$$

因此,对于每一$h\in K_{n+1}(x)=\{t\in K_{n+1},\widetilde{A}^{n+1}_t(x)\neq 0\}$有

$$\widetilde{A}^{n+1}_h(x)\cdot\widetilde{A}^n_i(x)\neq 0.$$

从而,我们得到

$$a^{n+1}_h\geqslant a^n_i>a_j-\varepsilon,\quad h\in K_{n+1}(x).$$

这样,我们就有

$$\begin{aligned}\widetilde{C}^n_{i,j}(x)&=\widetilde{A}^n_i(x)\cdot\widetilde{A}_j(x)\\&=\widetilde{A}^n_i(x)\cdot\widetilde{A}_j(x)\cdot\sum_{h\in K_{n+1}(x)}\widetilde{A}^{n+1}_h(x)\\&=\widetilde{A}^n_i(x)\cdot\sum_{h\in K_{n+1}(x)}\widetilde{C}^{n+1}_{h,j}(x),\end{aligned}$$

及$K_{n+1}(x)\times\{j\}\subset J_{n+1}$. 故

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_n(x)&=\sum_{(i,j)\in J_n}\widetilde{C}^n_{i,j}(x)\\&=\sum_{(i,j)\in J_n}\widetilde{A}^n_i(x)\cdot\sum_{h\in K_{n+1}(x)}\widetilde{C}^{n+1}_{h,j}(x)\\&\leqslant\sum_{i\in K_n(x)}\sum_{j\in J'_n}\sum_{h\in K_{n+1}(x)}\widetilde{C}^{n+1}_{h,j}(x)\widetilde{A}^n_i(x)\\&=\sum_{j\in J'_n}\sum_{h\in K_{n+1}(x)}\widetilde{C}^{n+1}_{h,j}(x)\cdot\sum_{i\in K_n(x)}\widetilde{A}^n_i(x)\end{aligned}$$

$$= \sum_{j\in J'_n}\sum_{h\in K_{n+1}(x)} \widetilde{C}^{n+1}_{h,j}(x),$$

其中 $J'_n=\{j\in K(x);\exists\ (i,j)\in J_n$ 使得 $\widetilde{C}^n_{i,j}(x)\neq 0\}$. 又因为对于任何 $j\in J'_n$,

$$K_{n+1}(x)\times\{j\}\subset J_{n+1},$$

所以

$$\widetilde{M}_n(x)\leqslant \sum_{j\in J'_n}\sum_{h\in K_{n+1}(x)} \widetilde{C}^{n+1}_{h,j}(x)\leqslant \sum_{(h,j)\in J_{n+1}} \widetilde{C}^{n+1}_{h,j}(x)=\widetilde{M}_{n+1}(x).$$

这样,我们就证明了 $\{\widetilde{M}_n\}$ 是一个单调增加的模糊集序列.

(ii) 我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{M}_n = X.$$

事实上,如果对于任何 $x\in X$ 和 $n\geqslant n(x,\varepsilon)$,存在 $j\in K(x)$ 和 $i\in K_n(x)$ 使得 $(i,j)\in J_n$,则

$$a^{n+1}_h\geqslant a^n_i > a_j-\varepsilon,\ h\in K_{n+1}(x).$$

因此,

$$\widetilde{M}_{n+1}(x)=\sum_{(h,j)\in J_{n+1}} \widetilde{A}^{n+1}_h(x)\cdot\widetilde{A}_j(x)$$

$$=\sum_{h\in K_{n+1}(x)} \widetilde{A}^{n+1}_h(x)\sum_{j\in K(x)}\widetilde{A}_j(x)=1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{M}_n(x)=1,\quad (x\in X).$$

(a), 当 $\mu_0(\widetilde{A})=+\infty$ 时,

$$\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0=\sum_{(i,j)\in I_n} a^n_i\cdot\mu_0(\widetilde{C}^n_{i,j}\cdot\widetilde{A})$$

$$\geqslant\sum_{(i,j)\in J_n} a^n_i\cdot\mu_0(\widetilde{C}^n_{i,j}\cdot\widetilde{A})$$

$$\geqslant(\alpha-\varepsilon)\sum_{(i,j)\in J_n}\mu_0(\widetilde{C}^n_{i,j}\cdot\widetilde{A})$$

$$=(\alpha-\varepsilon)\cdot\mu_0\Big(\bigoplus_{(i,j)\in J_n}(\widetilde{C}^n_{i,j}\cdot\widetilde{A})\Big)$$

$$=(\alpha-\varepsilon)\mu_0(\widetilde{M}_n\cdot\widetilde{A}).$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}s_n\mathrm{d}\mu_0&\geqslant(\alpha-\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\mu_0(\widetilde{M}_n\cdot\widetilde{A})\\&=(\alpha-\varepsilon)\mu_0(\lim_{n\to\infty}(\widetilde{M}_n\cdot\widetilde{A}))\\&=(\alpha-\varepsilon)\cdot\mu_0(\widetilde{A})=+\infty\geqslant\int_{\widetilde{A}}s\mathrm{d}\mu_0.\end{aligned}$$

(b) 当 $\mu_0(\widetilde{A})<+\infty$时,让我们记

$$\beta=\max\{a_j;j\in k\},$$

则

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}s_n\mathrm{d}\mu_0&=\sum_{(i,j)\in I_n}a_i^n\cdot\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})\geqslant\sum_{(i,j)\in J_n}a_i^n\cdot\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})\\&\geqslant\sum_{(i,j)\in J_n}(a_j-\varepsilon)\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})\\&=\sum_{(i,j)\in J_n}a_j\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})-\sum_{(i,j)\in J_n}\varepsilon\cdot\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})\\&=\sum_{(i,j)\in I_n}a_j\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})-\sum_{(i,j)\in I_n\setminus J_n}a_j\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})\\&\quad-\varepsilon\mu_0(\widetilde{A}\cdot\widetilde{M}_n).\\&\geqslant\int_{\widetilde{A}}s\mathrm{d}\mu_0-\beta\sum_{(i,j)\in I_n\setminus J_n}\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})-\varepsilon\mu_0(\widetilde{A}\cdot\widetilde{M}_n)\\&=\int_{\widetilde{A}}s\mathrm{d}\mu_0-\beta\Big(\sum_{(i,j)\in I_n}\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})-\sum_{(i,j)\in J_n}\mu_0(\widetilde{C}_{i,j}^n\cdot\widetilde{A})\Big)\\&\quad-\varepsilon\mu_0(\widetilde{A}\cdot\widetilde{M}_n)\\&=\int_{\widetilde{A}}s\mathrm{d}\mu_0-\beta(\mu_0(\widetilde{A})-\mu_0(\widetilde{A}\cdot\widetilde{M}_n))-\varepsilon\mu_0(\widetilde{A}\cdot\widetilde{M}_n).\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}s_n\mathrm{d}\mu_0\geqslant\int_{\widetilde{A}}s\mathrm{d}\mu_0-\beta(\mu_0(\widetilde{A})-\mu_0(\widetilde{A}))-\varepsilon\mu_0(\widetilde{A})$$

$$=\int_{\widetilde{A}} s\mathrm{d}\mu_0 - \varepsilon\mu_0(\widetilde{A}) \geqslant \int_{\widetilde{A}} s\mathrm{d}\mu_0.$$

推论 5.1.1 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}, f\in\mathscr{B}^+(\widetilde{A}), \{s_n\}, \{s_n'\}\in\mathscr{B}^+(f,\widetilde{A})$. 如果

(a) $s_{n+1}\geqslant_{\widetilde{A}} s_n, s_{n+1}' \geqslant_{\widetilde{A}} s_n', n=1,2,\cdots$;

(b) s_n 和 s_n'是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的, $n=1,2,\cdots$;

(c) 对于任何 $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)\cdot\widetilde{A}(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x)\cdot\widetilde{A}(x) = f(x)\cdot\widetilde{A}(x),$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n'\mathrm{d}\mu_0$ 存在,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n'\mathrm{d}\mu_0.$$

证明 首先,由定理 5.1.2,对于 $t_n=s_n, t=s_k', z=f$,我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0 \geqslant \int_{\widetilde{A}} s_k'\mathrm{d}\mu_0 \quad k = 1,2,\cdots,$$

从而,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0 \geqslant \lim_{k\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_k'\mathrm{d}\mu_0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n'\mathrm{d}\mu_0.$$

反之,同理可证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n'\mathrm{d}\mu_0 \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n\mathrm{d}\mu_0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n'\mathrm{d}\mu_0.$$

5.1.2 模糊值$\mathscr{B}$-函数关于模糊值测度的模糊值积分

定义 5.1.2 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}, f\in\mathscr{B}^+(\widetilde{A})$,如果存在$\{s_n\}\subset\mathscr{B}^+(f,\widetilde{A})$使得

$$s_{n+1}\geqslant_{\widetilde{A}} s_n \quad n = 1,2,\cdots,$$

和 $$\lim_{n\to\infty} s_n(x)\cdot\widetilde{A}(x) = f(x)\cdot\widetilde{A}(x) \quad (x\in X),$$

我们记

$$\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n \mathrm{d}\mu_0,$$

并将其称为 f 在 $\widetilde{A}$ 上的 μ_0-积分. 如果 $\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0 < +\infty$，则称 f 在 $\widetilde{A}$ 上是 μ_0-可积的.

定义 5.1.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$f\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，如果 f_+ 和 f_- 都是 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的非负实值 $\mathscr{B}$-函数，则称 f 是 μ_0-可积的，将

$$\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} f_+ \mathrm{d}\mu_0 - \int_{\widetilde{A}} f_- \mathrm{d}\mu_0$$

称 f 在 $\widetilde{A}$ 上的 μ_0-积分，特别是当 $\widetilde{A}=X$ 时，记为 $\int f \mathrm{d}\mu_0$.

定理 5.1.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$f\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，如果 f 在 $\widetilde{A}$ 上是 μ_0-可积的，则存在实值简单 $\mathscr{B}$-函数序列 $\{s_n\}$ 是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n \mathrm{d}\mu_0$$

证明 如果 f 是非负的，结论显然成立. 现在让我们考虑 f 含有负值的情况. 由定理 4.3.3 知，存在非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数序列 $\left\{s'_n = \sum_{k\in K(n)} b_k^n \widetilde{B}_k^n\right\}$，$\left\{s''_n = \sum_{h\in H(n)} c_h^n \cdot \widetilde{C}_h^n\right\}$ 单调增加并收敛于 f_+ 和 f_-，且

$$f_+ \vdash_{\widetilde{A}} s'_n, \quad f_- \vdash_{\widetilde{A}} s''_n, \quad n = 1,2,\cdots.$$

让我们令

$$s_n = s'_n - s''_n,\ n = 1,2,\cdots.$$

则

$$s_n = \sum_{k\in K(n)}\sum_{h\in H(n)} (b_k^n - c_h^n)\widetilde{B}_k^n \cdot \widetilde{C}_h^n.$$

对于任何 $x\in X$，如果 $b_k^n - c_h^n \geqslant 0$，因为 $c_h^n \geqslant 0$，我们有

$$(f_+(x) - (b_k^n - c_h^n))\widetilde{B}_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_h^n(x)\widetilde{A}(x)$$
$$\geqslant (f_+(x) - b_k^n)\widetilde{B}_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_h^n(x)\widetilde{A}(x).$$

又因为 $f_+ \vdash\!\!\!-_{\widetilde{A}} s'_n$，所以

$$(f_+(x) - (b_k^n - c_k^n))\widetilde{B}_k^n(x) \cdot C_k^n(x)\widetilde{A}(x) \geqslant 0$$

即 $f_+ \vdash\!\!\!-_{\widetilde{A}} s_n^+$，$n=1,2,\cdots$. 如果 $b_k^n - c_k^n \leqslant 0$，因为 $b_k^n \geqslant 0$，我们有

$$\begin{aligned}&(f_-(x) - (c_k^n - b_k^n))\widetilde{B}_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_k^n(x) \cdot \widetilde{A}(x)\\ &\geqslant (f_-(x) - c_k^n) \cdot \widetilde{B}_k(x) \cdot \widetilde{C}_k^n(x) \cdot \widetilde{A}(x),\end{aligned}$$

又因为 $f_- \vdash\!\!\!-_{\widetilde{A}} s''_n$，所以

$$(f_-(x) - (c_k^n - b_k^n))\widetilde{B}_k^n(x) \cdot \widetilde{C}_k^n(x) \cdot \widetilde{A}(x) \geqslant 0,$$

即 $f_- \vdash\!\!\!-_{\widetilde{A}} s_n^-$，$n = 1,2,\cdots$，从而 $f \vdash\!\!\!=_{\widetilde{A}} s_n$，$n = 1,2,\cdots$，且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n(x) &= \lim_{n\to\infty} s'_n(x) - \lim_{n\to\infty} s''_n(x)\\ &= f_+(x) - f_-(x) = f(x),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n \mathrm{d}\mu_0 &= \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} (s'_n - s''_n)\mathrm{d}\mu_0\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\widetilde{A}} s'_n \mathrm{d}\mu_0 - \int_{\widetilde{A}} s''_n \mathrm{d}\mu_0\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s'_n \mathrm{d}\mu_0 - \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s''_n \mathrm{d}\mu_0\\ &= \int_{\widetilde{A}} f_+ \mathrm{d}\mu_0 - \int_{\widetilde{A}} f_- \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0.\end{aligned}$$

定理 5.1.4 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$，$f, g \in \mathscr{B}^-(\widetilde{A})$，如果 $f \leqslant g$，则

$$\int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0 \leqslant \int_{\widetilde{A}} g \mathrm{d}\mu_0.$$

如果 g 是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，则 f 也是 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的.

证明 设 $\{t'_n\}$ 和 $\{t''_n\}$ 是 f 和 g 的满足(4.3.2)，(4.3.3)，(4.3.4)的两个非负实值简单 $\mathscr{B}$-函数，又因为对于任何 $x \in X$，$f(x) \leqslant g(x)$，和 $f \vdash\!\!\!-_{\widetilde{A}} t'_n$，$n=1,2,\cdots$，所以 $g \vdash\!\!\!-_{\widetilde{A}} t'_n$，$n=1,2,\cdots$，这样，我们用 $\{t''_n\}$ 代替定理 5.1.2 中的 $\{t_n\}$，g 代替 z，t'_k 代替 t，我们由定理 5.1.2 得到，对于任何 $k=1,2,\cdots$，有

$$\int_{\widetilde{A}} g \mathrm{d}\mu_0 = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} t_n'' \mathrm{d}\mu_0 \geqslant \int_{\widetilde{A}} t_k' \mathrm{d}\mu_0,$$

因此

$$\int_{\widetilde{A}} g \mathrm{d}\mu_0 \geqslant \lim_{k\to\infty}\int_{\widetilde{A}} t_k' \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0.$$

推论 5.1.2 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，如果 s 和 s' 是两个 $\widetilde{A}$ 上非负实值 μ_0-可积的简单 $\mathscr{B}$-函数，且 $s(x)\leqslant s'(x)$ $(x\in X)$，则

$$\int_{\widetilde{A}} s \mathrm{d}\mu_0 \leqslant \int_{\widetilde{A}} s' \mathrm{d}\mu_0.$$

定理 5.1.5 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$f,g\in\mathscr{B}^+(\widetilde{A})$，则

$$\int_{\widetilde{A}} (f+g) \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0 + \int_{\widetilde{A}} g \mathrm{d}\mu_0;$$

如果 f 和 g 都是 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，则 $f+g$ 也是 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的.

证明 我们只须证明第一部分. 设 $\{s_n\}$ 是 $\mathscr{B}^+(f,\widetilde{A})$ 中的单调增加且收敛于 f 的序列，$\{s_n'\}$ 是 $\mathscr{B}^+(g,\widetilde{A})$ 中的单调增加且收敛于 g 的序列，则 $\{s_n+s_n'\}\subset\mathscr{B}^+(f+g,\widetilde{A})$，且

$$s_{n+1}+s_{n+1}' \geqslant_{\widetilde{A}} s_n + s_n', \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}(s_n+s_n')(x)\widetilde{A}(x) = (f(x)+g(x))\widetilde{A}(x). \ (x\in X)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}} (f+g) \mathrm{d}\mu_0 &= \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} (s_n+s_n') \mathrm{d}\mu_0 \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n \mathrm{d}\mu_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_n' \mathrm{d}\mu_0 \\ &= \int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_0 + \int_{\widetilde{A}} g \mathrm{d}\mu_0.\end{aligned}$$

推论 5.1.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$f\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，则 $|f|\in\mathscr{B}^+(\widetilde{A})$ 且

$$\int_{\widetilde{A}} |f| \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\widetilde{A}} f_+ \mathrm{d}\mu_0 + \int_{\widetilde{A}} f_- \mathrm{d}\mu_0;$$

进一步地，f 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的充要条件是 $|f|$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积.

证明 因为 $f\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，所以 $f_+,f_-\in\mathscr{B}^+(\widetilde{A})$，从而由引理

4.3.1 知 $|f|=f_{+}+f_{-}\in\mathscr{B}^{+}(\widetilde{A})$. 这样，由定理 5.1.5 知

$$\int_{\widetilde{A}}|f|\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}f_{+}\,\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}f_{-}\,\mathrm{d}\mu_0.$$

推论 5.1.4 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$, $f\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，如果 f 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0 可积，则 $\left|\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0\right|\leqslant\int_{\widetilde{A}}|f|\mathrm{d}\mu_0$.

证明 显然.

定理 5.1.6 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$, $f,g\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，如果 f 和 g 都是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，且 $f+g$ 存在，则 $f+g$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积且

$$\int_{\widetilde{A}}(f+g)\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}g\mathrm{d}\mu_0.$$

证明 由定理 4.3.4 知 $f+g\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，所以由推论 5.1.3 知 $|f+g|\in\mathscr{B}^{+}(\widetilde{A})$，又因为 f 和 g 都是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，所以再由推论 5.1.3 知 $|f|$ 和 $|g|$ 是 μ_0-可积的，从而由定理 5.1.4 及 $|f+g|\leqslant|f|+|g|$ 知 $|f+g|$ 是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，从而 $f+g$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积，且

$$\begin{aligned}(f+g)_{+}-(f+g)_{-}=f+g&=f_{+}-f_{-}+g_{+}-g_{-}\\&=(f_{+}+g_{+})-(f_{-}+g_{-}).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{A}}(f+g)_{+}\,\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}f_{-}\,\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}g_{-}\,\mathrm{d}\mu_0\\&=\int_{\widetilde{A}}(f+g)_{-}\,\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}f_{+}\,\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}g_{+}\,\mathrm{d}\mu_0,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\int_{\widetilde{A}}(f+g)\mathrm{d}\mu_0\\&=\int_{\widetilde{A}}(f+g)_{+}\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}(f+g)_{-}\,\mathrm{d}\mu_0\\&=\int_{\widetilde{A}}f_{+}\,\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}}g_{+}\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}f_{-}\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}g_{-}\,\mathrm{d}\mu_0\end{aligned}$$

$$=\left(\int_{\widetilde{A}} f_+\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}} f_-\,\mathrm{d}\mu_0\right)+\left(\int_{\widetilde{A}} g_+\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}} g_-\,\mathrm{d}\mu_0\right)$$

$$=\int_{\widetilde{A}} f\mathrm{d}\mu_0+\int_{\widetilde{A}} g\mathrm{d}\mu_0.$$

定理 5.1.7 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$f\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，$\alpha\in R$，如果 f 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积，则 $\alpha\cdot f$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积，且

$$\int_{\widetilde{A}}(\alpha f)\mathrm{d}\mu_0=\alpha\cdot\int_{\widetilde{A}} f\mathrm{d}\mu_0.$$

证明

(1) f 是非负实值 $\mathscr{B}$-函数.

(i) 如果 $\alpha\geqslant 0$，则存在 $\left\{s_n=\sum_{i=1}^{k(n)}a_i^n\cdot\widetilde{A}_i^n\right\}\subset\mathscr{B}^+(f,\widetilde{A})$ 且

$$s_{n+1}\geqslant_{\widetilde{A}}s_n\quad n=1,2,\cdots$$

和

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)\widetilde{A}(x)=f(x)\widetilde{A}(x),(x\in X).$$

由命题 4.3.4，所以，$\left\{\alpha s_n=\sum_{i=1}^{k(n)}(\alpha\cdot a_i^n)\widetilde{A}_i^n\right\}\subset\mathscr{B}^+(\alpha\cdot f,\widetilde{A})$ 且

$$\alpha s_{n-1}\geqslant\alpha s_n,\ n=1,2,\cdots,$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\alpha s_n(x)\cdot\widetilde{A}(x)=\alpha f(x)\widetilde{A}(x),(x\in X),$$

因此

$$\int_{\widetilde{A}}\alpha\cdot f\mathrm{d}\mu_0=\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\alpha\cdot s_n\mathrm{d}\mu_0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\alpha\cdot\int_{\widetilde{A}}s_n\mathrm{d}\mu_0=\alpha\cdot\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0.$$

(ii) 如果 $\alpha=-1$，则 $(\alpha\cdot f)_+=0$ 和 $(\alpha\cdot f)_-=f$，所以我们有

$$\int_{\widetilde{A}}(\alpha\cdot f)\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}(\alpha\cdot f)_+\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}(\alpha\cdot f)_-\,\mathrm{d}\mu_0$$

$$=\int_{\widetilde{A}}0\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0=\alpha\cdot\int f\mathrm{d}\mu_0$$

(iii) 如果 $\alpha<0$ 且 $\alpha\neq-1$，则 $-\alpha>0$，这样，由(i)知

$$\int_{\widetilde{A}}(-\alpha)f\mathrm{d}\mu_0=-\alpha\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0.$$

再由(ii)知

$$\int_{\widetilde{A}}(\alpha\cdot f)\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}-((-\alpha)\cdot f)\mathrm{d}\mu_0=-\int_{\widetilde{A}}(-\alpha)f\mathrm{d}\mu_0$$

$$=-(-\alpha)\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0=\alpha\cdot\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0$$

(2) f 是一般实值 $\mathscr{B}$ 函数.

(i) 如果 $\alpha\geqslant0$，则由于 f 是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，则 f_+ 和 f_- 在 $\widetilde{A}$ 上也是 μ_0-可积的，从而由 I_a 知 αf_+，αf_- 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积且

$$\int_{\widetilde{A}}(\alpha f)\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}(\alpha f_+)\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}(\alpha\cdot f_-)\mathrm{d}\mu_0$$

$$=\alpha\int_{\widetilde{A}}f_+\,\mathrm{d}\mu_0-\alpha\int_{\widetilde{A}}f_-\,\mathrm{d}\mu_0$$

$$=\alpha\left(\int_{\widetilde{A}}f_+\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}f_-\,\mathrm{d}\mu_0\right)=\alpha\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0$$

(ii) 如果 $\alpha<0$. 则 $(\alpha f)_-=(-\alpha)\cdot f_-$，$(\alpha f)_-=(-\alpha)\cdot f_+$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积且由(1)的(i)可知

$$\int_{\widetilde{A}}(\alpha f)\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}(\alpha f)_+\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}(\alpha f)_-\,\mathrm{d}\mu_0$$

$$=\int_{\widetilde{A}}((-\alpha)\cdot f_-)\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}((-\alpha)f_+)\mathrm{d}\mu_0$$

$$=(-\alpha)\int_{\widetilde{A}}f_-\,\mathrm{d}\mu_0-(\alpha)\int_{\widetilde{A}}f_+\,\mathrm{d}\mu_0$$

$$=\alpha\left(\int_{\widetilde{A}}f_+\,\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}f_-\,\mathrm{d}\mu_0\right)$$

$$=\alpha\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0$$

结合定理 5.1.6 和定理 5.1.7，我们有

定理 5.1.8 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$f,g\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，$\alpha,\beta\in R$，如果 f 和 g 都

是 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积的，且 $\alpha f+\beta g$ 存在，则 $\alpha f+\beta g$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ_0-可积，且

$$\int_{\widetilde{A}}(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\mu_0=\alpha\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0+\beta\int_{\widetilde{A}}g\mathrm{d}\mu_0.$$

推论 5.1.5 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}, f,g\in\mathscr{B}(\widetilde{A})$，如果 $f\leqslant g$，则

$$\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0\leqslant\int_{\widetilde{A}}g\mathrm{d}\mu_0.$$

证明 设 $h=g-f$，则由引理 4.3.1 知 $h\in\mathscr{B}^+(\widetilde{A})$，再由定理 5.1.8，我们得到

$$0\leqslant\int_{\widetilde{A}}h\mathrm{d}\mu_0=\int_{\widetilde{A}}g\mathrm{d}\mu_0-\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0,$$

故

$$\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_0\leqslant\int_{\widetilde{A}}g\mathrm{d}\mu_0.$$

定义 5.1.4 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}, \widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$，如果对于任何 $\lambda\in(0,1]$，f_λ^- 和 f_λ^+ 都是在 $\widetilde{A}$ 上分别关于 μ_λ^- 和 μ_λ^+ 可积的，且存在实值简单 $\mathscr{B}$-函数列 $\{s_{n_\lambda}^-\}$ 和 $\{s_{n_\lambda}^-\}$ 它们分别是在 $\widetilde{A}$ 上 μ_λ^--可积的和 μ_λ^+-可积的，并使得对于 $\lambda\in(0,1]$ 一致成立

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-=\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}s_{n_\lambda}^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,$$

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+=\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}s_{n_\lambda}^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+,$$

则称 $\widetilde{f}$ 是在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的，且称

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

为 $\widetilde{f}$ 在 $\widetilde{A}$ 上的模糊集值积分，特别地，当 $\widetilde{A}=X$ 时，简记为 $\int\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu$.

引理 5.1.1 设 μ 是 $\mathscr{G}$ 上的一个模糊值测度，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\mu_\lambda=\mu_\lambda^+-\mu_\lambda^-$ 是 $\mathscr{G}$ 上的实值测度.

证明 显然.

定理 5.1.9 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$, $\widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$, 如果对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant 0$ 或 $\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ \geqslant 0$, 则 $\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\in\mathscr{F}^*(R)$, 特别地, 当 $\widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}^+(\widetilde{A})$ 时, $\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\in\mathscr{F}_+^*(R)$.

证明

(1) 我们先证明, 对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$\left[\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\ \int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]\neq\varnothing.$$

事实上, 我们不妨假设 $\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda\geqslant 0$, 则

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^+\geqslant\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-.$$

再由推论 5.1.5 知

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-\leqslant\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^+\leqslant\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

故

$$\left[\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\ \int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]\neq\varnothing.$$

(2) 我们证明, 对于任何 $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1]$, $\lambda_1<\lambda_2$,

$$\left[\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_2}\mathrm{d}\mu_{\lambda_2},\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_2}^+\mathrm{d}\mu_{\lambda_2}^+\right]\subset\left[\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_1}^-\mathrm{d}\mu_{\lambda_1}^-,\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_1}^+\mathrm{d}\mu_1^-\right].$$

事实上, 由于 $f_{\lambda_1}^-(x)\leqslant f_{\lambda_2}^-(x)$ 和 $f_{\lambda_1}^+(x)\geqslant f_{\lambda_2}^+(x)$, $x\in X$ 和

$$\mu_{\lambda_1}^-(\widetilde{A})\leqslant\mu_{\lambda_2}^-(\widetilde{A}),\ \mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{A})\geqslant\mu_{\lambda_2}^+(\widetilde{A}),\widetilde{A}\in\mathscr{G},$$

所以

$$\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_1}\mathrm{d}\mu_\lambda\leqslant\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_2}^-\mathrm{d}\mu_{\lambda_2}^-$$

及

$$\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_1}^+\mathrm{d}\mu_{\lambda_1}^+\geqslant\int_{\widetilde{A}}f_{\lambda_2}^+\mathrm{d}\mu_{\lambda_2}^+,$$

故

$$\left[\int_{\widetilde{A}} f_{\lambda_2}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_2}^-, \int_{\widetilde{A}} f_{\lambda_2}^+ \mathrm{d}\mu_{\lambda_2}^+\right] \subset \left[\int_{\widetilde{A}} f_{\lambda_1}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_1}, \int_{\widetilde{A}} f_{\lambda_1}^+ \mathrm{d}\mu_{\lambda_1}^-\right].$$

这样我们就证明了 $\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \in \mathscr{F}^*(R)$.

当$\widetilde{f} \in \widetilde{\mathscr{B}}^+(\widetilde{A})$时，我们可以类似证明

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \in \mathscr{F}_+^*(R).$$

定理 5.1.10 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$, $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$，如果$\widetilde{f}$满足定理 5.1.9 的条件，则

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n,$$

其中 $\widetilde{a}_n = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\left[\int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^- \mathrm{d}\mu_\lambda^-, \int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$, $n \geqslant N$.

证明 由定理 5.1.9，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

如果等式成立，显然. 如果等式不成立，我们可以证明，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，

$$\int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- < \int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

从而

$$\left[\int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^- \mathrm{d}\mu_\lambda^-, \int_{\widetilde{A}} s_{n_\lambda}^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+\right] \neq \varnothing,\ n \geqslant N.$$

同样可以证明

$$\left[\int_{\widetilde{A}} s_{n_{\lambda_1}}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_1}, \int_{\widetilde{A}} s_{n_{\lambda_1}}^+ \mathrm{d}\mu_{\lambda_1}^+\right] \supset \left[\int_{\widetilde{A}} s_{n_{\lambda_2}}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_2}^-, \int_{\widetilde{A}} s_{n_{\lambda_2}}^+ \mathrm{d}\mu_{\lambda_2}^+\right], \quad \lambda_1 < \lambda_2$$

即当 $n \geqslant N$ 时，$\widetilde{a}_n \in \mathscr{F}^*(R)$. 再根据定理 2.3.2

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu - (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \widetilde{a}_n.$$

5.2 模糊值$\mathscr{B}$-函数的模糊值积分的性质

定理 5.2.1 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$\widetilde{f},\widetilde{g}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$，$\tilde{\alpha}\in\mathscr{F}^*(R)$且 $\tilde{\alpha}\geqslant 0$ 或 $\tilde{\alpha}\leqslant 0$，则

(1) 如果$\widetilde{f}$和 $\widetilde{g}$ 都是在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的，且$\widetilde{f}+\widetilde{g}$ 存在，则$\widetilde{f}+\widetilde{g}$ 也是在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}+\widetilde{g})\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu+\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu.$$

(2) 如果$\widetilde{f}$是在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的，且$\widetilde{f}\geqslant 0$ 或$\widetilde{f}\leqslant 0$，则 $\tilde{\alpha}\cdot\widetilde{f}$也是 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}}(\tilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})\mathrm{d}\mu=\tilde{\alpha}\cdot\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明

(1) 因为$\widetilde{f},\widetilde{g}$ 在 $\widetilde{A}$ 上都是 μ-可积的，所以，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$f_\lambda^-,f_\lambda^+,g_\lambda^-,g_\lambda^+$ 都是 $\widetilde{A}$ 上实值 $\mathscr{B}$-函数且分别关于 μ_λ^- 和 μ_λ^+ 可积的，因此，由定理 5.1.6 知，$f_\lambda^-+g_\lambda^-$，$f_\lambda^++g_\lambda^+$ 在 $\widetilde{A}$ 上分别关于 μ_λ^- 和 μ_λ^+ 可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^-+g_\lambda^-)\mathrm{d}\mu_\lambda^-=\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-+\int_{\widetilde{A}}g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-$$

及

$$\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^++g_\lambda^+)\mathrm{d}\mu_\lambda^+=\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^++\int_{\widetilde{A}}g_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

从而，我们由$(\widetilde{f}+\widetilde{g})_\lambda^-=f_\lambda^-+g_\lambda^-$，$(\widetilde{f}+\widetilde{g})_\lambda^+=f_\lambda^++g_\lambda^+$ 可知，$\widetilde{f}+\widetilde{g}$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积，且

$$\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}+\widetilde{g})\mathrm{d}\mu$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}+\widetilde{g})_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}-\widetilde{g})_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^- + g_\lambda^-)\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^+ + g_\lambda^+)\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^- + \int_{\widetilde{A}}g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+ + \int_{\widetilde{A}}g_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]+\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}g_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu+\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu.$$

(2) 因为$\widetilde{f}$在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积，所以，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，f_λ^-，f_λ^+ 分别在 $\widetilde{A}$ 上关于 μ_λ^- 和 μ_λ^+ 可积，因此，由定理 5.1.7 知，对于任何 $\alpha,\beta\in R$，$\alpha\cdot f_\lambda^-$ 和 $\beta\cdot f_\lambda^+$ 在 $\widetilde{A}$ 上分别关于 μ_λ^- 和 μ_λ^+ 是可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}}(\alpha f_\lambda^-)\mathrm{d}\mu_\lambda^- = \alpha\cdot\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,$$

$$\int_{\widetilde{A}}(\beta f_\lambda^+)\mathrm{d}\mu_\lambda^+ = \beta\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

① 如果 $\widetilde{\alpha}\geqslant0$ 及$\widetilde{f}\geqslant0$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$(\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})_\lambda^- = \alpha_\lambda^-\cdot f_\lambda^-,\quad(\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})_\lambda^+ = \alpha_\lambda^+\cdot f_\lambda^+,$$

因此

$$\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}(\alpha_\lambda^-\cdot f_\lambda^-)\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}(\alpha_\lambda^+\cdot f_\lambda^+)\mathrm{d}\mu_\lambda^-\right]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\alpha_\lambda^-\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\alpha_\lambda^+\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\widetilde{\alpha}\cdot\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

② 如果 $\widetilde{\alpha}\geqslant0$ 但$\widetilde{f}\leqslant0$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$(\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})_\lambda^- = \alpha_\lambda^+\cdot f_\lambda^-,\ (\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f})_\lambda^+ = \alpha_\lambda^-\cdot f_\lambda^+$$

所以

$$\int_{\widetilde{A}}(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f})\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f})_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f})_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}(\alpha_\lambda^+\cdot f_\lambda^-)\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}(\alpha_\lambda^-\cdot f_\lambda^+)\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\alpha_\lambda^+\cdot\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\alpha_\lambda^-\cdot\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

$$=\tilde{\alpha}\cdot\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

当 $\tilde{\alpha}\leqslant 0$ 时同理可证.

推论 5.2.1 设$\tilde{f},\tilde{g}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$且$\tilde{f}\geqslant 0$ 或$\tilde{f}\leqslant 0,\tilde{g}\geqslant 0$ 或 $\tilde{g}\leqslant 0$，$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\mathscr{F}^*(R)$且 $\tilde{\alpha}\geqslant 0$，或 $\tilde{\alpha}\leqslant 0,\tilde{\beta}\geqslant 0$ 或 $\tilde{\beta}\leqslant 0$，如果$\tilde{f},\tilde{g}$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积，则 $\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{g}$ 也在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积，且

$$\int_{\widetilde{A}}(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{g})\mathrm{d}\mu=\tilde{\alpha}\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu+\tilde{\beta}\int_{\widetilde{A}}\tilde{g}\mathrm{d}\mu.$$

定理 5.2.2 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G},\tilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$，则

$$\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int\tilde{f}\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为

$$\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right]$$

及

$$\int\tilde{f}\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int f_\lambda^-\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int f_\lambda^+\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu_\lambda^+\right],$$

所以，我们只要证明

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-=\int f_\lambda^-\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu_\lambda^-,\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+=\int f_\lambda^+\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

我们现在只就 $f_\lambda\geqslant 0$ 证明，其它情况类似可证. 事实上，存在 $\left\{s_n=\sum_{i=1}^{k(n)}a_i^n\cdot\widetilde{A}_i^n\right\}\subset\mathscr{B}^+(f_\lambda^-,\widetilde{A})$，且

$$s_{n-1}\geqslant_{\widetilde{A}}s_n\quad 和\quad \lim_{n\to\infty}s_n(x)\widetilde{A}(x)=f_\lambda^-(x)\cdot\widetilde{A}(x).$$

使得

$$\int_{\tilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k(n)} a_i^n \cdot \mu_\lambda^- (\tilde{A}_i^n \cdot \tilde{A})$$

及$\{s_n \cdot \tilde{A}\} \subset \mathscr{B}^+(f_\lambda^- \cdot \tilde{A})$，且

$$s_{n+1} \cdot \tilde{A} \geqslant s_n \cdot \tilde{A}, \quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) \cdot \tilde{A}(x) = f_\lambda^-(x) \cdot \tilde{A}(x).$$

所以

$$\int f_\lambda^- \cdot \tilde{A} \mathrm{d}\mu_\lambda^- = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k(n)} a_i^n \cdot \mu_\lambda^- (\tilde{A}_i^n \cdot \tilde{A})$$

故

$$\int f_\lambda^- \cdot \tilde{A} \mathrm{d}\mu_\lambda^- = \int_{\tilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^-$$

定理 5.2.3 设 $\tilde{A}\in\mathscr{G}$，$\tilde{f},\tilde{g}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\tilde{A})$，如果$\tilde{f}\leqslant\tilde{g}$，则

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\tilde{A}} \tilde{g}\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为$\tilde{f}\leqslant\tilde{g}$，所以，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$f_\lambda^- \leqslant g_\lambda^-, \quad f_\lambda^+ \leqslant g_\lambda^+$$

因此，由推论 5.1.4 知

$$\int_{\tilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- \leqslant \int_{\tilde{A}} g_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^-, \int_{\tilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ \leqslant \int_{\tilde{A}} g_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

从而

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\tilde{A}} \tilde{g}\mathrm{d}\mu.$$

推论 5.2.2 设 $\tilde{A},\tilde{B}\in\mathscr{G}$，且 $\tilde{A}\subset\tilde{B}$，$\tilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\tilde{A})$，则

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\tilde{B}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 由定理 5.2.2 和定理 5.2.3

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int \tilde{f}\cdot\tilde{A}\mathrm{d}\mu \leqslant \int \tilde{f}\cdot\tilde{B}\mathrm{d}\mu = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 5.2.4 设 $\tilde{A}\in\mathscr{G}$，$\tilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\tilde{A})$，如果对于任何 $x\in X$ $\tilde{f}(x)$

$\equiv\tilde{\alpha}\in\mathscr{F}^*(R)$,则

$$\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\tilde{\alpha}\cdot\mu(\widetilde{A}).$$

证明 因为$\tilde{f}(x)\equiv\tilde{\alpha}$,所以,对于任何 $\lambda\in(0,1]$

$$f_\lambda^-(x)\equiv\alpha_\lambda^-,\ f_\lambda^+(x)\equiv\alpha_\lambda^+.$$

因此,f_λ^- 和 f_λ^+ 都是实值简单 $\mathscr{B}$-函数,且

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-=\alpha_\lambda^-\cdot\mu_\lambda^-(\widetilde{A}),\ \int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu=\alpha_\lambda^+\cdot\mu_\lambda^+(\widetilde{A}).$$

故

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[\alpha_\lambda^-\cdot\mu_\lambda(\widetilde{A}),\alpha_\lambda^+\cdot\mu_\lambda^+(\widetilde{A})]\\&=\tilde{\alpha}\cdot\mu(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

推论 5.2.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$,$\tilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$,且存在 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\mathscr{F}^*(R)$使得 $\tilde{\alpha}\leqslant\tilde{f}(x)\leqslant\tilde{\beta}$,$x\in X$,则

$$\tilde{\alpha}\cdot\mu(\widetilde{A})\leqslant\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\tilde{\beta}\cdot\mu(\widetilde{A}).$$

证明 由定理 5.2.3 和定理 5.2.4 可以立知.

推论 5.2.4 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$,$\tilde{f}\equiv0$,则 $\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=0$.

证明 由定理 5.2.4 立得.

定理 5.2.5 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$ 且 $\mu(\widetilde{A})=0$,$\tilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$,则

$$\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=0.$$

证明 我们只要证明,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda\,\mathrm{d}\mu_\lambda^-=\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+=0.$$

不妨设 $f_\lambda^-\geqslant0$,则存在$\left\{s_n=\sum_{i=1}^{k(n)}a_i^n\cdot\widetilde{A}_i^n\right\}\subset\mathscr{B}^+(f_\lambda^-,\widetilde{A})$且

$$s_{n+1}\geqslant_{\widetilde{A}}s_n\quad\lim_{n\to\infty}s_n(x)\cdot\widetilde{A}(x)=f_\lambda^-(x)\cdot\widetilde{A}(x),$$

使得

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k(n)} a_i^n \cdot \mu_\lambda^-(\widetilde{A}_i^n \cdot \widetilde{A}).$$

因为 $\mu(\widetilde{A})=0$,所以,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$0 \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{A}_i^n \cdot \widetilde{A}) \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{A}) = 0.$$

即

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}_i^n \cdot \widetilde{A}) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,k(n), n = 1,2,\cdots$$

故

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- = 0.$$

同理可证,$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ = 0$.

定理 5.2.6 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$,$\widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$,如果$\widetilde{f}=0$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处成立,则$\widetilde{f}$在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积,且

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = 0;$$

反之,如果$\widetilde{f}\geqslant 0$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处成立,且 $\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = 0$, 则$\widetilde{f}=0$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处成立. 其中假定 $0\cdot\widetilde{\infty}=0$.

证明 由命题 4.2.1 知,存在 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$,$\widetilde{E}\subset\widetilde{A}$ 且 $\mu(\widetilde{E})=0$ 使得 $\widetilde{f}=0$ 在 $\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}$ 上处处成立. 这样

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int \widetilde{f}\cdot\widetilde{A}\mathrm{d}\mu = \int \widetilde{f}\,(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\mathrm{d}\mu + \int \widetilde{f}\cdot\widetilde{E}\mathrm{d}\mu$$
$$-\int_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu + \int_{\widetilde{E}} \widetilde{f}\mathrm{d}\mu.$$

由定理 5.2.5 知右端第二个积分等于零. 下面证明右端第一个积分也等于零. 事实上,因为对于任何 $x\in X$,且$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})(x)>0$ 时,$\widetilde{f}(x)=0$,所以,

$$\widetilde{f}(x)\cdot(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})(x) = 0,$$

当$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})(x)\not>0$时，$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})(x)=0$，所以

$$\widetilde{f}(x)\cdot(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})(x)=0,$$

因此，由推论 5.2.4，

$$\int_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int\widetilde{f}\cdot(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\mathrm{d}\mu=\int 0\cdot\mathrm{d}\mu=0.$$

故

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=0.$$

反之，由于$\widetilde{f}\geqslant 0$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立，所以，存在$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，$\widetilde{E}\subset\widetilde{A}$且$\mu(\widetilde{E})=0$使得$\widetilde{f}\geqslant 0$在$\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}$上处处成立，所以，由定理5.2.5知

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int\widetilde{f}\cdot(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\mathrm{d}\mu+\int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int\widetilde{f}\,(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\mathrm{d}\mu.$$

又由于对于任何$x\in X$，$\widetilde{f}(x)\cdot(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})(x)\geqslant 0$，所以，对任何$\alpha>0$，由定理 5.1.9，

$$\int_{\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)<\alpha\}}}\widetilde{f}\cdot(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\mathrm{d}\mu\geqslant 0$$

再由单调性，

$$\int_{\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)\geqslant\alpha\}}}\widetilde{f}\cdot(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\mathrm{d}\mu=\int_{(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)\geqslant\alpha\}}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu$$
$$\geqslant\alpha\cdot\mu(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)\geqslant\alpha\}}.$$

因此

$$0\leqslant\alpha\cdot\mu((\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)\geqslant\alpha\}})\leqslant\int_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=0.$$

这只能是$\mu((\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)\geqslant\alpha\}})=0$. 从而再由

$$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)>0\}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\left\{x;\widetilde{f}(x)\geqslant\frac{1}{n}\right\}},$$

可知

$$\mu((\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)>0\}})=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu\left((\widetilde{A}\ominus\widetilde{E})\cdot\chi_{\left\{x;\widetilde{f}(x)\geqslant\frac{1}{n}\right\}}\right)$$
$$=0.$$

这样我们就证明了$\widetilde{f}=0$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立.

定理 5.2.7 设$\widetilde{A}\in\mathscr{G}$,$\widetilde{f},\widetilde{g}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$,如果$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立,则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立,则存在$\widetilde{E}\subset\widetilde{A}$,$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$,且$\mu(\widetilde{E})=0$使得$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}$上处处成立,所以,由定理5.2.5,

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu&=\int_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu+\int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{E}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu+\int_{\widetilde{E}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

定理 5.2.8 设$\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{G}$,$\widetilde{f},\widetilde{g}\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$,则

(1) $\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}\vee\widetilde{g})\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu\vee\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu$;

(2) $\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}\wedge\widetilde{g})\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu\wedge\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}\mathrm{d}\mu$;

(3) $\int_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu\vee\int_{\widetilde{B}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu$;特别地,当$\mu(\widetilde{B})=0$时,等式成立;

(4) $\int_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu\wedge\int_{\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu$

证明 显然.

定理 5.2.9 设$\widetilde{A}\in\mathscr{G}$,$\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in\widetilde{\mathscr{B}}(\widetilde{A})$,$\alpha\in[0,\infty)$,如果$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_1(x),\widetilde{f}_2(x))<\alpha$,($\forall\ x\in X$),则

$$\widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu,\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu\right)<2\alpha\cdot\mu(\widetilde{A}).$$

证明 因为$\widetilde{\rho}(\widetilde{a},\widetilde{b})\leqslant\alpha$的充要条件是

$$\widetilde{a}-\alpha\leqslant\widetilde{b}\leqslant\widetilde{a}+\alpha.$$

所以，

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu - \alpha \cdot \mu(\widetilde{A}) \leqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_2 \mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu + \alpha \cdot \mu(\widetilde{A}),$$

从而

$$\widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu, \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_2 \mathrm{d}\mu \right) \leqslant 2\alpha \cdot \mu(\widetilde{A}).$$

设$\widetilde{f},\widetilde{g} \in \widetilde{\mathscr{B}}$，我们定义$\widetilde{f}$和$\widetilde{g}$的模糊值拟距离，

$$\widetilde{d}(\widetilde{f},\widetilde{g}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \Big[\int |f_1^- - g_1^-| \mathrm{d}\mu_1^-,$$
$$\sup_{\lambda \leqslant \eta \leqslant 1} \int |f_\eta^- - g_\eta^-| \mathrm{d}\mu_\eta^- \vee \int |f_\eta^+ - g_\eta^+| \mathrm{d}\mu_\eta^+ \Big]$$

定理 5.2.10 设$\widetilde{f},\widetilde{g} \in \widetilde{\mathscr{B}}$，则

(1) $\widetilde{d}(\widetilde{f},\widetilde{g}) \in \mathscr{F}_+^*(R)$；

(2) $\widetilde{d}(\widetilde{f},\widetilde{f}) = 0$；

(3) $\widetilde{d}(\widetilde{f},\widetilde{g}) = \widetilde{d}(\widetilde{g},\widetilde{f})$；

(4) 对任何$\widetilde{h} \in \widetilde{\mathscr{B}}$，$\widetilde{d}(\widetilde{f},\widetilde{g}) \leqslant \widetilde{d}(\widetilde{f},\widetilde{h}) + \widetilde{d}(\widetilde{h},\widetilde{g})$.

证明 类似于定理 2.2.1 可以证明.

注 5.2.1 如果$\widetilde{d}(\widetilde{f},\widetilde{g}) = 0$，$\widetilde{f} = \widetilde{g}$不一定成立，例如，当两个可积函数几乎处处相等时，它们之间的模糊值拟距离就可以为零.

设$\widetilde{f} \in \widetilde{\mathscr{B}}$是$\mu$-可积的，对于每个$\widetilde{E} \in \mathscr{G}$，令

$$\nu(\widetilde{E}) = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

则称ν为$\widetilde{f}$的不定积分.

5.3 模糊值$\mathscr{B}$-函数的模糊值积分序列的收敛

定义 5.3.1 设$\{\widetilde{f}_n\} \subset \widetilde{\mathscr{B}}$且是$\mu$-可积的，如果

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \widetilde{d}(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}_m) = 0,$$

则称$\{\tilde{f}_n\}$是平均基本的.

定理 5.3.1 平均基本的 μ-可积模糊值函数列$\{\tilde{f}_n\}$是依模糊值测度基本的.

证明 对于任意固定的 $\varepsilon>0$,因$\{\tilde{f}_n\}$是平均基本的,存在 $N>0$,当 $n\geqslant N, m\geqslant N$ 时,

$$\tilde{d}(\tilde{f}_n, \tilde{f}_m) < \varepsilon^2.$$

从而,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$\int |f_{m_\lambda}^- - f_{n_\lambda}^-| \mathrm{d}\mu_\lambda^- < \varepsilon^2, \int |f_{m_\lambda}^+ - f_{n_\lambda}^+| \mathrm{d}\mu_\lambda^+ < \varepsilon^2.$$

但是

$$\int |f_{m_\lambda}^- - f_{n_\lambda}^-| \mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant \int_{\chi_{\{x; |f_{m_\lambda}^-(x) - f_{n_\lambda}^-(x)| \geqslant \varepsilon\}}} |f_{m_\lambda}^- - f_{n_\lambda}^-| \mathrm{d}\mu_\lambda^-$$

$$\geqslant \varepsilon \mu_\lambda^- (\chi_{\{x; |f_{m_\lambda}(x) - f_{n_\lambda}(x)| \geqslant \varepsilon\}}),$$

所以

$$\mu_\lambda (\chi_{\{x; |f_{m_\lambda}^-(x) - f_{n_\lambda}^-(x)| \geqslant \varepsilon\}}) < \varepsilon.$$

同理可证

$$\mu_\lambda^+ (\chi_{\{x; |f_{m_\lambda}(x) - f_{n_\lambda}^-(x)| \geqslant \varepsilon\}}) < \varepsilon.$$

故,$\{\tilde{f}_n\}$依模糊值测度 μ 基本的.

定义 5.3.2 设$\{\tilde{f}_n, \tilde{f}\} \subset \widetilde{\mathscr{B}}$ 且都是 μ-可积的,如果

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{f}_n, \tilde{f}) = 0,$$

则称$\{\tilde{f}_n\}$平均收敛于$\tilde{f}$.

定理 5.3.2 设$\{\tilde{f}_n, \tilde{f}\} \subset \widetilde{\mathscr{B}}$,如果$\{\tilde{f}_n\}$平均收敛于$\tilde{f}$,则$\{\tilde{f}_n\}$依模糊值测度 μ 收敛于$\tilde{f}$.

证明 因为$\{\tilde{f}_n\}$平均收敛于$\tilde{f}$,所以,对于任意固定的 $\varepsilon>0$,

存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\tilde{d}(\tilde{f}_n,\tilde{f})<\varepsilon^2,$$

从而，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\int|f_{n_\lambda}^- - f_\lambda^-|\mathrm{d}\mu_\lambda^- < \varepsilon^2,\ \int|f_{n_\lambda}^+ - f_\lambda^+|\mathrm{d}\mu_\lambda^+ < \varepsilon^2.$$

但是

$$\int|f_{n_\lambda}^- - f_\lambda^-|\mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant \int_{\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^- - f_\lambda^-|\geqslant\varepsilon\}}}|f_{n_\lambda}^- - f_\lambda^-|\mathrm{d}\mu_\lambda^-$$

$$\geqslant\varepsilon\mu_\lambda^-(\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\}}),$$

所以

$$\mu_\lambda^-(\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\}})<\varepsilon.$$

同理可证

$$\mu_\lambda^+(\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\varepsilon\}})<\varepsilon.$$

故 $\{\tilde{f}_n\}$ 依模糊值测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

定理 5.3.3 设 $\{\tilde{f}_n,\tilde{f}\}\subset\tilde{\mathscr{B}}$，如果 $\{\tilde{f}_n\}$ 平均收敛于 $\tilde{f}$，则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为 $\{\tilde{f}_n\}$ 平均收敛于 $\tilde{f}$，所以，对于任何给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\tilde{d}(\tilde{f}_n,\tilde{f})<\varepsilon.$$

从而，对任何 $\lambda\in(0,1]$，我们有

$$\int|f_{n_\lambda}^- - f_\lambda^-|\mathrm{d}\mu_\lambda^- < \varepsilon,\ \int|f_{n_\lambda}^+ - f_\lambda^+|\mathrm{d}\mu_\lambda^+ < \varepsilon.$$

又由于

$$\left|\int f_{n_\lambda}^-\mathrm{d}\mu_\lambda^- - \int f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-\right|\leqslant\int|f_{n_\lambda}^- - f_\lambda^-|\mathrm{d}\mu_\lambda^-$$

和

$$\left|\int f_{n_\lambda}^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ - \int f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+\right| \leqslant \int |f_{n_\lambda}^+ - f_\lambda^+| \mathrm{d}\mu_\lambda^+,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}\left(\int \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu, \int \tilde{f}\, \mathrm{d}\mu\right) \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\left|\int f_{n_1}^- \mathrm{d}\mu_1^- - \int f_1^- \mathrm{d}\mu_1^-\right|, \sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}\left|\int f_{n_\eta}^- \mathrm{d}\mu_\eta^- - \int f_\eta^- \mathrm{d}\mu_\eta^-\right| \\
&\quad \vee \left|\int f_{n_\eta}^+ \mathrm{d}\mu_\eta^+ - \int f_\eta^+ \mathrm{d}\mu_\eta^+\right|\Big] \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

从而

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int \tilde{f}\, \mathrm{d}\mu.$$

定理 5.3.4 设$\{\tilde{f}_n\}$是平均基本的 μ-可积模糊值 $\mathscr{B}$-函数列，如果对于任何 $k>0$，$\left\{\int_{\tilde{E}} \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu\right\} \in A^*$ ，则对任何 $\tilde{E}\in\mathscr{G}$，

$$\nu(\tilde{E}) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \nu_n(\tilde{E})$$

存在.

证明 因为$\{\tilde{f}_n\}$是平均基本的，所以对于任何给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n,m\geqslant N$ 时，

$$\tilde{d}(\tilde{f}_m, \tilde{f}_n) < \varepsilon,$$

所以

$$\tilde{\rho}\left(\int_{\tilde{E}} \tilde{f}_m \mathrm{d}\mu, \int_{\tilde{E}} \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu\right) \leqslant \tilde{d}(\tilde{f}_m, \tilde{f}_n) < \varepsilon.$$

故 $\left\{\int_{\tilde{E}} \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu\right\}$是一个基本模糊数序列，从而由定理 2.4.4 知，存在 ν 使得

$$\nu(\tilde{E}) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \int_{\tilde{E}} \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{E}).$$

定理 5.3.5 设 $\tilde{A}\in\mathscr{G}$，$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}^+(\tilde{A})$，且$\{\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$是单调增加的，如果 $\left\{\int_{\tilde{A}} \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$ 则存在$\tilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}^+(\tilde{A})$使得$\tilde{f}(x)=$

$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x)(x\in X)$，且

$$\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

进一步地，如果$\tilde{f}$是 $\tilde{A}$ 上 μ-可积的，则$\tilde{f}_n(n\in N)$也都是 $\tilde{A}$ 上 μ-可积的.

证明 因为$\{\tilde{f}_n\}$是一个模糊值 $\mathscr{B}$-函数列，且$\{\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$是单调增加的$(x\in X)$，所以，由定理 4.3.1，存在$\tilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}^+(\tilde{A})$，使得

$$\tilde{f}(x)=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x),x\in X.$$

再由定理 5.2.3，

$$0\leqslant\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_{n+1}\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

所以，如果$\tilde{f}$是 $\tilde{A}$ 上 μ-可积的，$\tilde{f}_n$ 也是 $\tilde{A}$ 上 μ-可积的. 再由定理 2.4.1，$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu$ 是存在的，且

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\sup_{n\geqslant1}\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

下面我们证明 $(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu\not<\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu$，事实上，如果$(\tilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\tilde{A}}\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu<\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu$，则存在 $\lambda_0\in(0,1]$使得

$$\sup_{n\geqslant1}\int_{\tilde{A}}f^-_{n_{\lambda_0}}\mathrm{d}\mu^-_{\lambda_0}<\int_{\tilde{A}}f^-_{\lambda_0}\mathrm{d}\mu^-_{\lambda_0}$$

或

$$\sup_{n\geqslant1}\int_{\tilde{A}}f^+_{n_{\lambda_0}}\mathrm{d}\mu^+_{\lambda_0}<\int_{\tilde{A}}f^+_{\lambda_0}\mathrm{d}\mu^+_{\lambda_0}.$$

我们不妨假定$\int_{\tilde{A}}f_{\lambda_0}\mathrm{d}\mu_{\lambda_0}>\sup\limits_{n\geqslant1}\int_{\tilde{A}}f^-_{n_{\lambda_0}}\mathrm{d}\mu^-_{\lambda_0}$. 因为$\{\tilde{f}_n,\tilde{f}\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}^+(\tilde{A})$，所以，$\{f^-_{n_{\lambda_0}},f^-_{\lambda_0}\}\subset\mathscr{B}^+(\tilde{A})$，因此存在$\{s_{k,n}\}\subset\mathscr{B}^+(f^-_{n_{\lambda_0}},\tilde{A})$，使得

$$\lim_{n\to\infty}s_{k,n}(x)=f^-_{n_{\lambda_0}}(x),\qquad(x\in X);$$

$$s_{k+1,n} \geqslant s_{k,n}, \qquad (k \in N).$$

让我们假设

$$s_{k,n} = \sum_{i \in K(K,n)} a_i^{k,n} \cdot A_i^{k,n}, \quad (K,n) \in N \times N.$$

其中 $K(k,n)$是一个有限集，我们记

$$H(k) - K(k,1) \times K(k,2) \times \cdots \times K(k,k).$$

对于任何 $\bar{n}=(n_1,\cdots,n_k) \in H(k)$，我们定义模糊集合

$$\overline{B}_n^k = \widetilde{A}_{n_1}^{k,1} \cdot \widetilde{A}_{n_2}^{k,2} \cdot \cdots \widetilde{A}_{n_k}^{k,k}$$

和实数

$$b_n^k = \max(a_{n_1}^{k,1}, a_{n_2}^{k,2}, \cdots, a_{n_k}^{k,k}).$$

显然，$\{\overline{B}_n^k, \bar{n} \in H(k)\}$是一个 X 的有限模糊划分，且对每个 $\bar{n} \in H(k)$，$b_n^k \geqslant 0$ 及

$$t_n = \sum_{n \in H(k)} b_n^k \cdot \overline{B}_n^k \in B^+ (f_{\lambda_0}^-, \widetilde{A})$$

和

$$\lim_{n \to \infty} t_n(x) = f_\lambda^-(x), (x \in X).$$

$$t_{n+1} \geqslant t_n, \quad (n \in N).$$

对于任何 $n \in N, x \in X$，我们有

$$0 \leqslant t_n(x) \leqslant \sum_{\bar{n} \in H(k,x)} f_{n_{\lambda_0}}^-(x) \cdot \overline{B}_n^k(x) = f_{n_{\lambda_0}}^-(x),$$

其中 $H(k,x) = \{\bar{n} \in H(k); \overline{B}_n^k(x) \neq 0\}$. 因为 $\overline{B}_n^k(x) \neq 0$ 意味着 $\widetilde{A}_{n_i}^{i,k}(x) \neq 0$和$\tilde{f}_{n_{\lambda_0}}(x) \geqslant f_{n_{\lambda_0}}^-(x) \geqslant a_{n_i}^{i,k}, 1 \leqslant i \leqslant n$. 因此，我们得到

$$\int_{\widetilde{A}} t_n \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}^- \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_{n_{\lambda_0}}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}^-.$$

从而

$$\int_{\widetilde{A}} f_{\lambda_0}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}^- = \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} t_n \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}^- \leqslant \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} f_{n_{\lambda_0}}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}^-$$

$$= \sup_{n \geqslant 1} \int_{\widetilde{A}} f_{n_{\lambda_0}}^- \mathrm{d}\mu_{\lambda_0}^-.$$

这样产生矛盾. 故

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu.$$

定理 5.3.6 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$, $\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{\mathscr{B}^+}(\widetilde{A})$, 如果 $\widetilde{f}(x)=\liminf \widetilde{f}_n(x)(x\in X)$, $\left\{\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$,且上有界,则 $\widetilde{f}$ 和 $\widetilde{f}_n$ 都是 $\widetilde{A}$ 上 μ 可积的,且

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \leqslant (\widetilde{\rho})\liminf_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu.$$

证明 因为 $0\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\neq\widetilde{\alpha}$,所以 $\widetilde{f}_n$ 在 $\widetilde{A}$ 上是 μ-可积的,让我们令

$$\widetilde{g}_n(x)=\inf_{k\geqslant n}\widetilde{f}_k(x),\quad (x\in X, n\in N).$$

由定理 4.3.6, $\{\widetilde{g}_n\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}^+(\widetilde{A})$, 又由于

$$0\leqslant\widetilde{g}_n(x)\leqslant\widetilde{f}_n(x),\quad (x\in X),$$

所以 $\widetilde{g}_n$ 是 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的. 又因为

$$\widetilde{f}(x)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\widetilde{g}_n(x),\quad (x\in X);$$

所以,由定理 5.3.5,

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu &= (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}_n\mathrm{d}\mu\\ &\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_k\mathrm{d}\mu\neq\widetilde{\infty},\end{aligned}$$

即 $\widetilde{f}$ 在 $\widetilde{A}$ 上 μ 可积. 因为 $\widetilde{g}_n(x)\leqslant\widetilde{f}_k(x)$ $(x\in X, k\geqslant n)$, 所以

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\inf_{k\geqslant n}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_k\mathrm{d}\mu.$$

故

$$\int_{A}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\leqslant(\widetilde{\rho})\liminf_{n\to\infty}\int_{A}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

定理 5.3.7 设 $\widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}^+$ 且是 μ-可积的, $\{\widetilde{E}_n\}$ 是 $\mathscr{G}$ 中互不相交

的模糊集合列，$\widetilde{E}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$，则$\widetilde{f}$在 $\widetilde{E}$ 和 $\widetilde{E}_n$ 上是 μ-可积的，且

$$\int_{\widetilde{E}} f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\widetilde{E}_n} f\mathrm{d}\mu.$$

证明 由于定理 5.2.2，我们有

$$\int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int\widetilde{f}\,(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)\,\mathrm{d}\mu=\int\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{f}\cdot\widetilde{E}_n)\Big)\mathrm{d}\mu.$$

再由定理 5.2.1，对于任何的自然数 n，

$$\int\Big(\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{f}\cdot\widetilde{E}_i)\Big)\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\int(\widetilde{f}\cdot\widetilde{E}_i)\mathrm{d}\mu$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{\widetilde{E}_i}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

又由于 $\widetilde{g}_{n+1}(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(\widetilde{f}\cdot\widetilde{E}_i)(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\widetilde{f}(x)\cdot\widetilde{E}_i(x)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}(x)\widetilde{E}_i(x)$ $=\widetilde{g}_n(x)$，$x\in X$，$n=1,2,\cdots$，所以，由定理 5.3.5

$$\int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{f}\cdot\widetilde{E}_n)\Big)\mathrm{d}\mu$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(\widetilde{f}\cdot\widetilde{E}_i)\Big)\mathrm{d}\mu$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{\widetilde{E}_i}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\widetilde{E}_n}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

推论 5.3.1 设$\widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}^{+}$且是 μ-可积的，则 ν 是一个 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度.

证明 由定理 3.2.1 和定理 5.3.7 即知.

定理 5.3.8 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$，且存在 $\widetilde{f}$ 使得 $\widetilde{f}(x)=$

$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{f}_n(x)$ $(x\in X)$，及 $\widetilde{g}\in\widetilde{\mathscr{B}}^+$ 且 $\widetilde{g}$ 是 μ-可积的使得对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$|f_{n_\lambda}^-(x)|\leqslant g_\lambda^-(x),\quad |f_{n_\lambda}^+(x)|\leqslant g_\lambda^+(x),\ (x\in X,n\in N).$$

如果 $\left\{\int_A\widetilde{f}_n(x)\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$，则 $\widetilde{f}$，$\widetilde{f}_n$ 都是在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为 $\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$ 及对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$(f_\lambda^-)_-=\lim_{n\to\infty}(f_{n_\lambda}^-)_-,\ (f_\lambda^-)_+=\lim_{n\to\infty}(f_{n_\lambda}^-)_+,$$

$$(f_\lambda^+)_-=\lim_{n\to\infty}(f_{n_\lambda}^+)_-,(f_\lambda^+)_+=\lim_{n\to\infty}(f_{n_\lambda}^+)_+,$$

所以 $(f_\lambda^-)_-$，$(f_\lambda^-)_+$，$(f_\lambda^+)_-$，$(f_\lambda^+)_+$ 都是非负实值 $\mathscr{B}$-函数，故 $\widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}^+$. 同样 $|f_{n_\lambda}^-|$，$|f_{n_\lambda}^+|$ 也是非负实值 $\mathscr{B}$-函数列，且

$$\int|f_{n_\lambda}^-|\mathrm{d}\mu_\lambda\leqslant\int g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-<+\infty,$$

$$\int|f_{n_\lambda}^+|\mathrm{d}\mu_\lambda^+\leqslant\int g_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^-<+\infty.$$

从而 $\{f_{n_\lambda}^-\}$，$\{f_{n_\lambda}^+\}$ 分别是 μ_λ^--可积的和 μ_λ^+-可积的. 再由

$$\int|f_\lambda^-|\mathrm{d}\mu_\lambda\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int|f_{n_\lambda}^-|\mathrm{d}\mu_\lambda\leqslant\int g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-<+\infty,$$

$$\int|f_\lambda^+|\mathrm{d}\mu_\lambda^+\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int|f_{n_\lambda}^+|\mathrm{d}\mu_\lambda^+\leqslant\int g_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+<+\infty,$$

从而 $|f_\lambda^-|$ 和 $|f_\lambda^+|$ 分别是 μ_λ^--可积的和 μ_λ^+-可积的，故 f_λ^- 和 f_λ^+ 是 μ_λ^--可积的和 μ_λ^+-可积的，这样，$\widetilde{f}$ 就是 μ-可积的.

又因为

$$g_\lambda^-(x)-(f_{n_\lambda}^-)_-(x)\geqslant 0,\ g_\lambda^-(x)-(f_{n_\lambda}^-)_+(x)\geqslant 0,\ x\in X,$$

所以，由定理 5.3.7

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}(g_\lambda^- - (f_{n_\lambda}^-)_-)\mathrm{d}\mu_\lambda^-\geqslant\int(g_\lambda^- - (f_\lambda^-)_-)\mathrm{d}\mu_\lambda^-,$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf\int_{\widetilde{A}}(g_\lambda^- - (f_{n_\lambda}^-)_+)\mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant \int(g_\lambda^- - (f_\lambda^-)_+)\mathrm{d}\mu_\lambda^-.$$

因此

$$\int_{\widetilde{A}}g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^- - \lim_{n\to\infty}\sup\int_{\widetilde{A}}(f_{n_\lambda}^-)_-\mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant \int_{\widetilde{A}}g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^- - \int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^-)_-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,$$

$$\int_{\widetilde{A}}g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^- - \lim_{n\to\infty}\sup\int_{\widetilde{A}}(f_{n_\lambda}^-)_+\mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant \int_{\widetilde{A}}g_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^- - \int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^-)_+\mathrm{d}\mu_\lambda^-.$$

故

$$\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^-)_-\mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}(f_{n_\lambda}^-)_-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,$$

$$\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^-)_+\mathrm{d}\mu_\lambda^- \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}(f_{n_\lambda}^-)_+\mathrm{d}\mu_\lambda^-.$$

再由定理 5.3.7 知

$$\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^-)_-\mathrm{d}\mu_\lambda^- = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}(f_{n_\lambda}^-)_-\mathrm{d}\mu_\lambda^-,$$

$$\int_{\widetilde{A}}(f_\lambda^-)_+\mathrm{d}\mu_\lambda^- = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}(f_{n_\lambda}^-)_+\mathrm{d}\mu_\lambda^-.$$

从而

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_\lambda^- = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}f_{n_\lambda}^-\mathrm{d}\mu_\lambda^-.$$

同理可证

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+ = \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}f_{n_\lambda}^+\mathrm{d}\mu_\lambda^+.$$

注意到 $\left\{\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$，我们有

$$\int\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

推论 5.3.2 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$\mu$ 是 σ-有限的模糊值测度. $\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$ 且存在 $\widetilde{f}$ 使得 $\{\widetilde{f}_n\}$ 强依 μ 收敛于 $\widetilde{f}$，及存在 $\widetilde{g}\in\widetilde{\mathscr{B}^+}$ 且 $\widetilde{g}$ 是 μ-可积的使得对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$|f_{n_\lambda}^-(x)|\leqslant g_\lambda^-(x),\ |f_{n_\lambda}^+(x)|\leqslant g_\lambda^+(x),\ (x\in X, n\in N),$$

如果 $\left\{\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu\right\} \in A^*$，则$\widetilde{f}, \widetilde{f}_n$ 都是在 $\widetilde{A}$ 上 μ-可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu = (\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu.$$

证明 由定理 4.2.9 及定理 5.2.5，定理 5.3.6 和定理 5.3.8 立知，$\widetilde{f}$是 μ-可积的，且

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu = (\widetilde{\rho}) \lim_{i \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_{n_i} \mathrm{d}\mu.$$

下面我们证明

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu = (\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu.$$

事实上，(i) 当 $\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$，对于任何 $\varepsilon > 0$，记

$$\widetilde{H}_n = \widetilde{A} \cap \chi_{\{x; \widetilde{\rho}(f_n, f) < \varepsilon\}}.$$

则

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu, \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu\right) &\leqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}) \mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \int_{\widetilde{A} \ominus \widetilde{H}_n} \widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}) \mathrm{d}\mu + \int_{\widetilde{H}_n} \widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}) \mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \varepsilon \mu(\widetilde{A} \ominus \widetilde{H}_n) + \int_{\widetilde{H}_n} \widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}) \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

下面我们考察 $\int_{\widetilde{H}_n} \widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}) \mathrm{d}\mu$. 因为

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{H}_n} \widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}) \mathrm{d}\mu \leqslant \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\Big[&\int_{\widetilde{H}_n} |f_{n_1}^-| \mathrm{d}\mu_1^- + \int_{\widetilde{H}_n} |f_1^-| \mathrm{d}\mu_1^-, \\
&\sup \Big| \int_{\widetilde{H}_n} |f_{n_\eta}^-| \mathrm{d}\mu_\eta^- + \int_{\widetilde{H}_n} |f_\eta^-| \mathrm{d}\mu_\eta^- \Big| \\
&\vee \Big| \int_{\widetilde{H}_n} |f_{n_\eta}^+| \mathrm{d}\mu_\eta^+ + \int_{\widetilde{H}_n} |f_\eta^+| \mathrm{d}\mu_\eta^+ \Big| \Big] \\
\leqslant \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\Big[& 2\int_{\widetilde{H}_n} g_1^- \mathrm{d}\mu_1^-, 2\int_{\widetilde{H}_n} g_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ \Big]
\end{aligned}$$

$$=2\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\left[\int_{\tilde{H}_n} g_1^- \mathrm{d}\mu_1^-,\ \int_{\tilde{H}_n} g_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+\right].$$

$$=2\int_{\tilde{H}_n}\tilde{\rho}(\tilde{g},0)\mathrm{d}\mu.$$

根据模糊值积分的定义，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，存在 $\left\{s_{n_\lambda}^{-(+)}=\sum_{i\in H(m)} a_i^{m-(+)}\tilde{A}_i^m\right\}$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\tilde{H}_n} s_{m_\lambda}^{-(+)}\mathrm{d}\mu_\lambda^{-(+)}=\int_{\tilde{H}_n}(\tilde{\rho}(\tilde{g},0))_\lambda^{-(+)}\mathrm{d}\mu_\lambda^{-(+)}.$$

故存在 $N>0$、当 $m\geqslant N$ 时

$$\left|\int_{\tilde{H}_n}\tilde{\rho}(\tilde{g},0)_\lambda^{-(+)}\mathrm{d}\mu_\lambda^{-(+)}-\sum_{i\in H(m)} a_i^{m(+)}\mu_\lambda^{-(+)}(\tilde{A}_i^m\cdot\tilde{H}_n)\right|<\varepsilon.$$

这样

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{H}_n}\tilde{\rho}(\tilde{g},0)_\lambda^{-(+)}\mathrm{d}\mu_\lambda^{-(+)}\leqslant&\left|\int_{\tilde{H}_n}\tilde{\rho}(\tilde{g},0)_\lambda^{-(+)}\mathrm{d}\mu_\lambda^{-(+)}\right.\\&\left.-\sum_{i\in H(n)} a_i^{m-(+)}\mu_\lambda^{-(+)}(\tilde{A}_i^m\cdot\tilde{H}_n)\right|\\&+\sum_{i\in H(n)} a_i^{m-(+)}\mu_\lambda^{-(+)}(\tilde{A}_i^m\cdot\tilde{H}_n)\\<&\ \varepsilon+\sum_{i\in H(n)} a_i^{m-(+)}\mu_\lambda^{-(+)}(\tilde{A}_i^n\cdot\tilde{H}_n).\end{aligned}$$

再由 $\{\tilde{f}_n\}$ 强依模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，存在 $N_1>0$，当 $n\geqslant N_1$ 时

$$\mu(\tilde{H}_n)<\varepsilon.$$

这样取 $N_2=N_1\vee N$，当 $n\geqslant N$ 时，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\int_{\tilde{H}_n}\tilde{\rho}(\tilde{g},0)_\lambda^{-(+)}\mathrm{d}\mu_\lambda^{-(+)}<\varepsilon+\varepsilon\cdot\sum_{i\in H(n)} a_i^{m-(+)}.$$

故

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\tilde{H}_n}\tilde{\rho}(\tilde{g},0)\mathrm{d}\mu=0.$$

从而由

$$\widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu, \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu\right) \leqslant \varepsilon\mu(\widetilde{A} \ominus \widetilde{H}_n) + 2\int_{\widetilde{H}_n} \widetilde{\rho}(\widetilde{g}, 0)\mathrm{d}\mu,$$

知

$$(\widetilde{\rho})\ \lim_{n\to\infty} \widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu, \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu\right) \leqslant \varepsilon.$$

再由 ε 的任意性

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu.$$

5.4 模糊值测度的弱收敛

定义 5.4.1 设 $\eta_n: \mathscr{G} \to \mathscr{F}_+^*(R), n=0,1,2,\cdots$,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$ 恒成立

$$\widetilde{\rho}(\eta_n(\widetilde{A}), \eta_0(\widetilde{A})) < \varepsilon,$$

则称$\{\eta_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上一致收敛于 η_0;如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n,m>N$ 时对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$ 恒成立

$$\widetilde{\rho}(\eta_m(\widetilde{A}), \eta_n(\widetilde{A})) < \varepsilon,$$

则称$\{\eta_n\}$是在 $\mathscr{G}$ 上一致基本的.

命题 5.4.1 设 $\eta_n: \mathscr{G} \to \mathscr{F}_+^*(R), n=1,2,\cdots$,如果对于任何 $k\geqslant 1$ $\{\inf_{n\geqslant 1} \eta_n(\widetilde{A})\} \in A^*, \{\sup_{n\geqslant 1} \eta_n(\widetilde{A})\} \in A^*, \widetilde{A} \in \mathscr{G}$,则$\{\eta_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上一致收敛的充分必要条件是$\{\eta_n\}$是在 $\mathscr{G}$ 上的基本列.

证明 必要性显然,我们证明充分性. 对于任意固定 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$,模糊数序列$\{\eta_n(\widetilde{A})\}$满足 Cauchy 收敛原理的条件,因此根据定理 2.4.4 知$\{\eta_n(\widetilde{A})\}$是收敛的. 设

$$(\widetilde{\rho})\ \lim_{n\to\infty} \eta_n(\widetilde{A}) = \eta(\widetilde{A}), \quad \widetilde{A} \in \mathscr{G}.$$

则 η 是定义在 $\mathscr{G}$ 上的模糊值模糊集函数,以下只须证明$\{\eta_n(\widetilde{A})\}$ $(\widetilde{A} \in \mathscr{G})$一致收敛于 $\eta(\widetilde{A})$. 事实上,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,由假设存在 $N>0$,使当 $n,m>N$ 时对 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$ 恒成立

$$\tilde{\rho}(\eta_n(\tilde{A}),\eta_m(\tilde{A})) < \varepsilon.$$

固定 n，令 $m \to \infty$，则由定理 2.3.9 得

$$\tilde{\rho}(\eta_n(\tilde{A}),\eta_m(\tilde{A})) = (\tilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\tilde{\rho}(\eta_n(\tilde{A}),\eta_m(\tilde{A})) \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了 $\{\eta_n\}$ 在 $\mathscr{G}$ 上一致收敛于 η.

定理 5.4.1 设 $\tilde{f} \in \widetilde{\mathscr{B}}^+$，如果 $\{\mu_n\}$ 是一列 $\mathscr{G}$ 上的一致基本的模糊值模糊集函数，且 $\left\{\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n\right\} \in A^*$，则由

$$\eta_n(\tilde{A}) = \int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n, \quad \tilde{A} \in \mathscr{G}$$

确定的 $\{\eta_n\}$ 是一致基本列，如果 $\mu_n, n=1,2,\cdots$ 又是 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度，且对于任何 n，$\tilde{f}$ 是 μ_n-可积的，则存在 η 使得

$$\eta(\tilde{A}) = (\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_n(\tilde{A}),$$

且 η 是 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度.

证明 因为 $\{\mu_n\}$ 是一列 $\mathscr{G}$ 上的一致基本的模糊值模糊集函数，所以，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n,m>N$ 时对于 $\tilde{A} \in \mathscr{G}$ 一致成立

$$\tilde{\rho}(\mu_n(\tilde{A}),\mu_m(\tilde{A})) < \varepsilon.$$

因此，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，一致成立

$$|\mu_{n_\lambda}^-(\tilde{A}) - \mu_{m_\lambda}^-(\tilde{A})| < \varepsilon,\ |\mu_{n_\lambda}^+(\tilde{A}) - \mu_{m_\lambda}^+(\tilde{A})| < \varepsilon.$$

故

$$\mu_{m_\lambda}^-(\tilde{A}) - \varepsilon < \mu_{n_\lambda}^-(\tilde{A}) < \mu_{m_\lambda}^+(\tilde{A}) + \varepsilon,$$

$$\mu_{m_\lambda}^+(\tilde{A}) - \varepsilon < \mu_{n_\lambda}^+(\tilde{A}) < \mu_{m_\lambda}^+(\tilde{A}) + \varepsilon.$$

再根据模糊值积分的定义，由于 $\tilde{f} \in \widetilde{\mathscr{B}}^+$，所以，存在 $\left\{s_{m_\lambda}^{-(+)} = \sum_{i\in H(n)} a_{i_\lambda}^{m-(+)}\tilde{A}_i^m\right\}$，使得对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\int_{\tilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^- = \lim_{m\to\infty}\sum_{i\in H(n)} a_{i_\lambda}^{m^-}\mu_{n_\lambda}^-(\tilde{A}\cdot\tilde{A}_i^m),$$

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^+ = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\in H(n)} a_{i_\lambda}^{m+} \mu_{n_j}^+ (\widetilde{A} \cdot \widetilde{A}_i^m).$$

从而，我们有

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_{m_\lambda} - \varepsilon \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^- \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_{m_\lambda}^- + \varepsilon$$

和

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_{m_\lambda}^+ + \varepsilon \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^+ \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_{m_\lambda}^+ + \varepsilon.$$

即

$$\widetilde{\rho}(\eta_m(\widetilde{A}), \eta_n(\widetilde{A})) = \widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu_m, \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu_n \right) < \varepsilon.$$

再使用命题 5.4.1，存在 η 使得

$$\eta(\widetilde{A}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu_n.$$

下面我们证明 η 是一模糊值测度.

(1) 因为 μ_n $n=1,2,\cdots$ 都是模糊值测度，所以

$$\mu_n(\varnothing) = 0, \quad n = 1,2,\cdots,$$

再由定理 5.2.5，

$$\eta_n(\varnothing) = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu_n = 0, \quad n = 1,2,\cdots,$$

从而

$$\eta(\varnothing) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \eta_n(\varnothing) = 0.$$

(2) 对于任何 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathscr{G}$, $\widetilde{A} \& \widetilde{B} = \varnothing$，则由定理 5.2.2 对任何 n，

$$\begin{aligned} \eta_n(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) &= \int_{\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}} \widetilde{f} \mathrm{d}\mu_n = \int (\widetilde{f}\, \widetilde{A} + \widetilde{f}\, \widetilde{B}) \mathrm{d}\mu_n \\ &= \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu_n + \int_{\widetilde{B}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu_n = \eta_n(\widetilde{A}) + \eta_n(\widetilde{B}). \end{aligned}$$

从而由定理 2.3.3

$$\eta(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \eta_n(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B})$$

$$=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\eta_n(\widetilde{A})+\eta_n(\widetilde{B}))$$

$$=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_n(\widetilde{A})+(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_n(\widetilde{B})$$

$$=\eta(\widetilde{A})+\eta(\widetilde{B}).$$

(3) 设$\{\widetilde{A}_m\}\subset\mathscr{G}$，$\widetilde{A}_1\subset\widetilde{A}_2\subset\cdots$，则由定理 5.3.5，对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $m>N$ 时，

$$\widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}_m}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n,\int_{\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n\right)<\varepsilon/3.$$

再由$\{\eta_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上一致收敛于 η 知，存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{A}),\eta_n(\widetilde{A}))<\varepsilon/3.$$

这样

$$\widetilde{\rho}(\eta(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m),\eta(\widetilde{A}_m))\leqslant\widetilde{\rho}(\eta(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m),\eta_n(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m))$$

$$+\widetilde{\rho}(\eta_n(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m),\eta_n(\widetilde{A}_m))+\widetilde{\rho}(\eta_n(\widetilde{A}_m),\eta(\widetilde{A}_m))<\varepsilon.$$

即

η 是一个模糊值测度.

定理 5.4.2 设$\{\mu_n,\mu\}$是 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度，$\widetilde{f}\in\widetilde{\mathscr{B}}$，如果$\{\mu_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上一致收敛于 μ，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.\qquad\widetilde{A}\in\mathscr{G}.$$

证明 因为$\{\mu_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上一致收敛于 μ，所以，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$ 和 $\lambda\in(0,1]$，我们有

$$|\mu_{n_\lambda}^-(\widetilde{A})-\mu_\lambda^-(\widetilde{A})|<\varepsilon\quad\text{和}\quad|\mu_{n_\lambda}^+(\widetilde{A})-\mu_\lambda^+(\widetilde{A})|<\varepsilon.$$

再根据模糊积分的定义，存在 $\left\{s_{m_\lambda}^{-(+)}=\sum\limits_{i\in H(n)}a_{i_\lambda}^{m-(+)}\widetilde{A}_i^m\right\}$，使得对 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\int_{\widetilde{A}}f_\lambda^-\mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^-=\lim_{m\to\infty}\sum_{i\in H(n)}a_{i_\lambda}^{m-}\mu_{n_\lambda}^-(\widetilde{A}\cdot\widetilde{A}_i^m),$$

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^+ = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\in H(n)} a_{i_\lambda}^{m+} \mu_{n_\lambda}^+ (\widetilde{A} \cdot \widetilde{A}_i^m),$$

以及

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\in H(n)} a_{i_\lambda}^{m-} \mu_\lambda^- (\widetilde{A} \cdot \widetilde{A}_i^m),$$

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\in H(n)} a_{i_\lambda}^{m+} \mu_\lambda^+ (\widetilde{A} \cdot \widetilde{A}_i^m).$$

从而一致成立

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- - \varepsilon \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^- \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^- \mathrm{d}\mu_\lambda^- + \varepsilon,$$

$$\int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ - \varepsilon \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_{n_\lambda}^+ \leqslant \int_{\widetilde{A}} f_\lambda^+ \mathrm{d}\mu_\lambda^+ + \varepsilon.$$

故

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

定义 5.4.2 设 $\mu_n, \mu, n=1,2,\cdots$是 $\mathscr{G}$ 上的一列模糊值测度，如果对于任何$\widetilde{f} \in \widetilde{\mathscr{B}}^+$，有

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu, \qquad \widetilde{A} \in \mathscr{G},$$

则称$\{\mu_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上弱收敛于 μ.

定理 5.4.2′ 设 $\mu_n, \mu, n=1,2,\cdots$是 $\mathscr{G}$ 上的一列模糊值测度，$\widetilde{f} \in \widetilde{\mathscr{B}}^+$，如果$\{\mu_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上一致收敛于 μ，则$\{\mu_n\}$在 $\mathscr{G}$ 上弱收敛于 μ.

$\mathscr{A}$ 表示 X 上的开集族，$\mathscr{L}$ 表示 X 上的闭集族，$\mathscr{G}_0$ 表示 X 上的 Bord 集族，显然 $\mathscr{G}_0 = \sigma(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{L})$.

定义 5.4.3 设 X 是一距离空间，μ 是 $\mathscr{G}_0$ 上的模糊值测度，且 $\mu(X) \neq \widetilde{\infty}$，如果对于任何 $A \in \mathscr{G}_0$，$\varepsilon > 0$，都存在 X 中的闭集 F 和开集 G，使得

$$F \subset A \subset G \quad 且 \quad \mu(G - F) < \varepsilon. \tag{5.4.1}$$

则称 μ 是正则的.

定理 5.4.3 设 X 是一距离空间, μ 是 $\mathscr{G}_0$ 上的模糊值测度,且 $\mu(X)\neq\widetilde{\infty}$ 和 $\mu(\mathscr{G}_0)\in A^*$,则 μ 是正则的.

证明 我们用 $\mathscr{D}$ 表示 $\mathscr{G}_0$ 中使得(5.4.1)式成立的 A 的全体. 分以下几步讨论.

(1) 证明 $\mathscr{G}_0$ 中的闭集全体 $\mathscr{L}\subset\mathscr{D}$.

设 $A\in\mathscr{L}$, $\rho(x,y)$是 X 上的距离函数,我们令

$$G_n=\left\{x;\ x\in X,\rho(x,A)<\frac{1}{n}\right\},\quad n\geqslant 1,$$

则 $G_n\searrow A$,且 G_n 都是开集,即 $G_n\in\mathscr{A}$. 因此,由定理 3.2.2 知

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(G_n-A)=0.$$

从而,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $R_0\geqslant 1$ 使得

$$\mu(G_{n_0}-A)<\varepsilon,$$

取 $G=G_{n_0}$, $F=A$,则可知关于 A,(5.4.1)式成立,即 $\mathscr{L}\subset\mathscr{D}$.

(2) 再证 $\mathscr{D}$ 是 σ-代数.

(a) 由于 X 是闭集,那么 $X\in\mathscr{L}\subset\mathscr{D}$.

(b) 如果 $A\in\mathscr{D}$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $G_1\in\mathscr{A}$ 和 $F_1\in\mathscr{L}$,使得

$$F_1\subset A\subset G_1\quad 且\quad \mu(G_1-F_1)<\varepsilon.$$

对于 $A^c=X-A$,取 $F=X-G_1$, $G=X-F_1$,则 $F\in\mathscr{L}$, $G\in\mathscr{A}$. 并且

$$F\subset A^c\subset G\quad 且\quad \mu(G-F)=\mu(G_1-F_1)<\varepsilon,$$

这表明 $A^c\in\mathscr{D}$.

(c) 设$\{A_k\}\subset\mathscr{D}$,且$\{A_k\}$是一互不相交的,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $G_k\in\mathscr{A}$ 和 $F_k\in\mathscr{L}$,使得

$$F_k\subset A_k\subset G_k\quad 且\quad \mu(G_k-F_k)<\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\quad k=1,2,\cdots,$$

又因为$\bigcup_{k=1}^{n}F_k \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$，所以，存在$n_0\geqslant 1$，使得

$$\tilde{\rho}\left(\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right),\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n_0}F_k\right)\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

我们取

$$F=\bigcup_{k=1}^{n_0}F_k\in\mathscr{L},\quad 且\quad G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k\in\mathscr{A}.$$

则

$$F\subset A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\subset G.$$

且

$$\begin{aligned}
\mu(G-F)&=\mu\left(\left(G-\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k-F\right)\right)\\
&=\mu\left(G-\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)+\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k-F\right)\\
&=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k-\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)+\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k-F\right)\\
&\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k-F_k)\right)+\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k-F\right)\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(G_k-F_k)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

综合以上证明，说明$\mathscr{D}$是一个σ-代数，且$\mathscr{D}=\sigma(\mathscr{A})=\sigma(\mathscr{L})$.

推论 5.4.1 在定理 5.4.3 的条件下，对于任何的$A\in\mathscr{G}_0$，有

$$\begin{aligned}
\mu(A)&=\sup\{\mu(F);F\subset A 且 F\in\mathscr{L}\}\\
&=\inf\{\mu(G);A\subset G\in\mathscr{A}\}.
\end{aligned}$$

证明 对于任何自然数n，由定理 5.4.3，存在两集列$\{F_n'\}\subset\mathscr{L}$和$\{G_n'\}\subset\mathscr{A}$使得

$$F_n'\subset A\subset G_n'\quad 且\quad \mu(G_n'-F_n')<\frac{1}{n}.$$

令

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} F'_k \quad 和 \quad G_n = \bigcap_{k=1}^{n} G'_k.$$

则有 $F_n \in \mathscr{L}, G_n \in \mathscr{A}, n=1,2,\cdots$，且

$$0 \leqslant \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A) \leqslant \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - F'_n) \leqslant \mu(G'_n - F'_n),$$

所以

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(G'_n - F'_n) = 0.$$

从而，由 μ 的可加性，

$$\begin{aligned}\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) &= \mu(A \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A)) \\ &= \mu(A) + \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n - A) \\ &= \mu(A) + 0 = \mu(A).\end{aligned}$$

同理可证

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(A).$$

推论 5.4.2 设 X 是一距离空间，μ 和 ν 都是 $\mathscr{G}_0$ 上的模糊值测度，且 $\mu(X) \neq \widetilde{\infty}, \mu(\mathscr{G}_0) \in A^*$ 和 $\nu(X) \neq \widetilde{\infty}, \nu(\mathscr{G}_0) \in A^*$，如果对于任何 $F \in \mathscr{L}, \mu(F) = \nu(F)$（分别地，对于任何 $G \in \mathscr{A}, \mu(G) = \nu(G)$），则 $\mu \equiv \nu$.

证明 显然.

定理 5.4.4 设 $E, F \in \mathscr{L}$，且 $E \cap F = \varnothing$，则存在一定义在 X 上的连续模糊值函数，使得

(1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $(x \in X)$.

(2) $f(x) = 1$, $x \in E$; $f(x) = 0$, $x \in F$.

证明 对于任何 $A \in \mathscr{G}_0$，我们记

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y); y \in A\}.$$

令

$$f(x)=\frac{\rho(x,F)}{\rho(x,F)+\rho(x,E)},$$

可以容易验证此函数就能满足定理要求.

下面我们引入两个记号

$\pi=\{\mu;\mu$ 为 $\mathscr{G}_0$ 上的正则模糊值测度,且 $\mu(\mathscr{G}_0)\in A^*\}$

$c^+=\{\tilde{f};\tilde{f}$为定义在 X 上的有界的连续模糊值函数,且$\tilde{f}(x)\geqslant 0\quad x\in X\}$.

定理 5.4.5 设 $\mu,\nu\in\pi$,如果对于任何$\tilde{f}\in c^+$

$$\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\nu,\quad \tilde{A}\in\mathscr{G}_0$$

则 $\mu=\nu$.

证明 设 $F\in\mathscr{L}$,记

$$G_n=\left\{x;\rho(x,F)<\frac{1}{n}\right\},\ n=1,2,\cdots,$$

则 $F\cap G_n=\varnothing$, $n=1,2,\cdots$,且

$$\inf\{\rho(x,y);\ x\in F,\ y\in G_n^c\}\geqslant\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots.$$

由定理 5.4.4,存在$\tilde{f}_n\in c^+$使得

(1) $0\leqslant\tilde{f}_n(x)\leqslant 1,\quad x\in X,\ n=1,2,\cdots$

(2) $\tilde{f}_n(x)=1,\ x\in F,\ \tilde{f}_n(x)=0,\ x\in G_n^c,\ n=1,2,\cdots$

因此,

$$0\leqslant\chi_F\leqslant\tilde{f}_n\leqslant\chi_{G_n},\quad n=1,2,\cdots,$$

于是,由定理 5.2.2,

$$\begin{aligned}\mu(F)&=\int\chi_F\mathrm{d}\mu\leqslant\int\tilde{f}_n\mathrm{d}\mu\\&=\int\tilde{f}_n\mathrm{d}\nu\leqslant\int\chi_{G_n}\cdot\mathrm{d}\nu=\nu(G_n).\end{aligned}$$

从而

$$\mu(F) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \nu(G_n) = \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) = \nu(F),$$

交换 μ 与 ν 的位置，又可得到

$$\nu(F) \leqslant \mu(F).$$

故

$$\nu(F) = \mu(F)$$

再由推论 5.4.2 得证.

定理 5.4.6 设 $\{\mu,\mu_n\}\subset\pi$，且 μ_n 弱收敛于 μ，则对于任何 $F\in\mathscr{L}$，$G\in\mathscr{A}$，

$$(\widetilde{\rho}) \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(F) \leqslant \mu(F) \text{ 和 } (\widetilde{\rho}) \underline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(G_n) \geqslant \mu(G).$$

证明 我们仅就第一个不等式证明，另一个可以类似得到. 事实上，设 F 是 X 中任一个闭集，令

$$G_k = \left\{x; \rho(x,F) < \frac{1}{k}\right\} \quad k = 1,2,\cdots$$

则

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

和

$$F \cap G_k^c = \varnothing \text{ 且 } \inf\{\rho(x,y); x\in F, y\in G_k^c\} \geqslant \frac{1}{k}, k=1,2,\cdots$$

由定理 5.4.4 存在 $\widetilde{f}_k\in c^+$，使得

(1) $0\leqslant\widetilde{f}_k\leqslant 1$，　$x\in X$

(2) $\widetilde{f}_k(x)=1$，$x\in F$，$\widetilde{f}_k(x)=0$，$x\in G_k^c$，$k=1,2,\cdots$

显然

$$\chi_F \leqslant \widetilde{f}_k \leqslant \chi_{G_k}. \quad k = 1,2,\cdots.$$

因为 $\{\mu_n\}$ 弱收敛于 μ，则对于任何 k，

$$(\widetilde{\rho}) \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(F) = (\widetilde{\rho}) \overline{\lim_{n\to\infty}} \int \chi_F \mathrm{d}\mu_n$$

$$\leqslant (\tilde{\rho}) \varlimsup_{n\to\infty} \int \tilde{f}_k \mathrm{d}\mu_n$$

$$= (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_k \mathrm{d}\mu_n$$

$$= \int f_k \mathrm{d}\mu \leqslant \int \chi_{G_k} \mathrm{d}\mu = \mu(G_k).$$

从而，再由定理 2.2.2

$$(\tilde{\rho}) \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(G_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \mu(F).$$

定义 5.4.4 称 $A \in \mathscr{G}_0$ 为 μ-连续的，如果

$$\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\overline{A}),$$

其中

$$A^\circ = \bigcup \{G; G \subset A, G \in \mathscr{A}\},$$
$$\overline{A} = \bigcap \{F; F \supset A, F \in \mathscr{L}\}.$$

定理 5.4.7 设 $\{\mu_n, \mu\} \subset \pi$，$\{\mu_n\}$弱收敛于 μ，如果 $A \in \mathscr{G}_0$ 是 μ-连续的，则

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

证明 由定理 5.4.6 及 $\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\overline{A})$ 知

$$\mu(A) = \mu(A^\circ) \leqslant (\tilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu_n(A^\circ) \leqslant (\tilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

$$\leqslant (\tilde{\rho}) \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leqslant (\tilde{\rho}) \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A})$$

$$\leqslant \mu(\overline{A}) = \mu(A).$$

于是

$$(\tilde{\rho}) \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(A) = (\tilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A),$$

即

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

第 6 章　广义模糊值测度的分解

6.1　广义模糊值测度的哈恩分解与约当分解

定义 6.1.1　设 $\mathscr{G}$ 是一个 X 上的模糊集合 σ-代数，$\mu: \mathscr{G}\to \mathscr{F}^*(R)$ 称为模糊集合上的广义模糊值测度，如果 μ 满足下述条件：

(1) $\mu(\varnothing)=0$；

(2) 如果 $\{\widetilde{A}_n\}$ 是 $\mathscr{G}$ 中的一列互不相交的模糊集，则

$$\mu(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

定义 6.1.2　设 μ 是定义在 $(X,\mathscr{G})$ 上的广义模糊值测度，我们说 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$ 为正集，如果对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，有

$$\mu(\widetilde{E}\&\widetilde{F}) \geqslant 0;$$

我们说 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$ 为负集，如果对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，有

$$\mu(\widetilde{E}\&\widetilde{F}) \leqslant 0.$$

以下我们记 $\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，$\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$ 分别为 μ 的正集和负集的全体.

显然，$\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$ 和 $\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$ 是非空的.

命题 6.1.1

(1) 如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_-(G)$（分别地，$\widetilde{E}\in\mathscr{M}$ $(\mathscr{G})$），则对于任何的 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，有

$$\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{F}) \geqslant 0 \quad (\text{分别地},\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{F}) \leqslant 0);$$

(2) 如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$（分别地，$\widetilde{E}\in\mathscr{M}$ $(\mathscr{G})$），则对于任何 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$ 且 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，有

$$\mu(\widetilde{F}) \geqslant 0 \quad (\text{分别地 } \mu(\widetilde{F}) \leqslant 0);$$

(3) 如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$(分别地,$\widetilde{E}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$),则对于任何 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$ 且 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$,有 $\widetilde{F}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$(分别地,$\widetilde{F}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$);

(4) 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$(分别地,$\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$),则 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$ 且 $\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\geqslant\mu(\widetilde{A})\vee\mu(\widetilde{B})$(分别地,$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$ 且 $\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\leqslant\mu(\widetilde{A})\wedge\mu(\widetilde{B})$).

证明

(1) 因为 $\widetilde{E}\cap\widetilde{F}=((\widetilde{F}\oplus\widetilde{E}^c)^c\oplus\widetilde{E}^c)^c=(\widetilde{F}\oplus\widetilde{E}^c)\&\widetilde{E}$,所以,由 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$ 知

$$\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{F})=\mu((\widetilde{F}\oplus\widetilde{E}^c)\&\widetilde{E})\geqslant 0.$$

同理可证,如果 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$.

$$\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{F})\leqslant 0.$$

(2) 设 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$,则 $\widetilde{F}=\widetilde{F}\cap\widetilde{E}$,由于 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$及(1),我们有

$$\mu(\widetilde{F})=\mu(\widetilde{F}\cap\widetilde{E})\geqslant 0.$$

同理可证,如果 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$,

$$\mu(\widetilde{F})=\mu(\widetilde{F}\cap\widetilde{E})\leqslant 0.$$

(3) 设 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$,对于任何 $\widetilde{E}'\subset\widetilde{E}$ 且 $\widetilde{E}'\in\mathscr{G}$,我们有

$$\widetilde{E}'=\widetilde{E}'\cap\widetilde{E}=(\widetilde{E}'\oplus\widetilde{E}^c)\&\widetilde{E}.$$

又由于对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$,$\widetilde{F}\&(\widetilde{E}'\oplus\widetilde{E}^c)\in\mathscr{G}$,则

$$\widetilde{E}'\&\widetilde{F}=\widetilde{E}\&(\widetilde{E}'\oplus\widetilde{E}^c)\&\widetilde{F}\in\mathscr{G},$$

从而,由 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$知

$$\mu(\widetilde{E}'\&\widetilde{F})\geqslant 0,$$

即 $\widetilde{E}'\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$.

同理可证,对于任何 $\widetilde{E}'\in\mathscr{G}$,且 $\widetilde{E}'\subset\widetilde{E}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$,有 $\widetilde{E}'\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$.

(4) 由于对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\&\widetilde{F}=(\widetilde{A}\&\widetilde{F})\cup(\widetilde{B}\&\widetilde{F})=[(\widetilde{A}\&\widetilde{F})\&(\widetilde{B}\&\widetilde{F})^c]\oplus(\widetilde{B}\&\widetilde{F})$且$[(\widetilde{A}\&\widetilde{F})\ominus(\widetilde{B}\&\widetilde{F})]\&(\widetilde{B}\&\widetilde{F})=\varnothing$,所以,由 μ 的可加性,我们有

$$\mu((\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\&\widetilde{F})=\mu((\widetilde{A}\&\widetilde{F})\&(\widetilde{B}\&\widetilde{F})^c)+\mu(\widetilde{B}\&\widetilde{F}).$$

又由于 $\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$所以，由(3)知 $\widetilde{A}\&\widetilde{F}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，再由$(\widetilde{B}\&\widetilde{F})^c\in\mathscr{G}$，我们有 $\mu((\widetilde{A}\&\widetilde{F})\&(\widetilde{B}\&\widetilde{F})^c)\geqslant 0$. 从而，由 $\widetilde{B}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，

$$\mu((\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\&\widetilde{F})\geqslant\mu(\widetilde{B}\&\widetilde{F})\geqslant 0.$$

故 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，再由 $\widetilde{F}$ 的任意性，

$$\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\geqslant\mu(\widetilde{B}).$$

同理可证

$$\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\geqslant\mu(\widetilde{A}).$$

故 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$且

$$\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\geqslant\mu(\widetilde{A})\vee\mu(\widetilde{B}).$$

类似可以证明，

当 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$时 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$，且

$$\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\leqslant\mu(\widetilde{A})\wedge\mu(\widetilde{B}).$$

定义 6.1.3 称$\mathscr{G}$关于μ具有(S)性，如果对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，$\mu(\widetilde{E})\neq 0$，则一定存在 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$ 且 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$，使得$\inf\limits_{\lambda>0}\mu_\lambda^-(\widetilde{F})>0$

定理 6.1.1 （哈恩分解定理Ⅰ）设μ是$\mathscr{G}$上的广义模糊值测度且对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果$\mathscr{G}$关于$\mu$具有$(S)$性，则存在一对互不相交的经典集 $P_0,Q_0\in\mathscr{G}$，使得

(1) $P_0\oplus Q_0=X$；

(2) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}(P_0)$，有 $\mu(\widetilde{A})\geqslant 0$；

(3) 对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{G}(Q_0)$，有 $\mu(\widetilde{B})\leqslant 0$，

其中 $\mathscr{G}(\widetilde{A})=\{\widetilde{B};\widetilde{B}\in\mathscr{G}$ 且 $\widetilde{B}\subset\widetilde{A}\}$，$\widetilde{A}\in\mathscr{G}$.

为了证明该定理，我们先证明引理.

引理 6.1.1 设μ是$\mathscr{G}$上的广义实值测度且对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$|\mu(\widetilde{A})|<+\infty$，则存在一对互不相交的经典集 $P_0,Q_0\in\mathscr{G}$，使得

(1) $P_0\oplus Q=X$；

(2) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}(P_0)$，有 $\mu(\widetilde{A})\geqslant 0$；

(3) 对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{G}(Q_0)$，有 $\mu(\widetilde{B})\leqslant 0$.

证明 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，我们记

$$\mu^+(\widetilde{A})=\sup\{\mu(\widetilde{B});\widetilde{B}\in\mathscr{G}(\widetilde{A})\}, \tag{6.1.1}$$

$$\mu^-(\widetilde{A})=-\inf\{\mu(\widetilde{B});\widetilde{B}\in\mathscr{G}(\widetilde{A})\}. \tag{6.1.2}$$

显然 μ^+,μ^- 都是 $\mathscr{G}$ 上的实值测度，且

$$\mu(\widetilde{A})=\mu^+(\widetilde{A})-\mu^-(\widetilde{A}),\quad \forall\,\widetilde{A}\in\mathscr{G}.$$

因此，对于任何正整数 n，存在 $\widetilde{A}_n\in\mathscr{G}$，使得

$$\mu^+(X)\leqslant\mu(\widetilde{A}_n)+1/2^{n+1}.$$

从而，我们有

$$\mu^+(X)-(\mu^+(\widetilde{A}_n)-\mu^-(\widetilde{A}_n))\leqslant 1/2^{n+1}.$$

再由于 $\mu^+(X)=\mu^+(\widetilde{A}_n)+\mu^+(\widetilde{A}_n^c)$，我们有

$$\mu^+(\widetilde{A}_n^c)+\mu^-(\widetilde{A}_n)\leqslant 1/2^{n+1}. \tag{6.1.3}$$

这样，由 $\mu^-(\widetilde{A}_n)$和 $\mu^+(\widetilde{A}_n^c)$的非负性，对于任何 $n\in N$，

$$\mu^+(\widetilde{A}_n^c)\leqslant 1/2^{n+1}\quad 和\quad \mu^-(\widetilde{A}_n)\leqslant 1/2^{n+1}. \tag{6.1.4}$$

让我们记

$$P=\lim_{k\to\infty}\mathop{\&}_{n=k+1}^{\infty}\widetilde{A}_n\quad 和\quad Q=P^c.$$

显然 P 是存在的，且 $P,Q\in\mathscr{G}$. 进一步地，

$$Q=P^c=\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathop{\&}_{n=k+1}^{\infty}\widetilde{A}_n\Big)^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\mathop{\&}_{n=k+1}^{\infty}\widetilde{A}_n\Big)^c$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigoplus_{n=k+1}^{\infty}\widetilde{A}_n^c\subset\bigoplus_{n=k+1}^{\infty}\widetilde{A}_n,\quad \forall\,k\in N.$$

这样，我们得到

$$0\leqslant\mu^+(Q)\leqslant\mu^+\Big(\bigoplus_{n=k+1}^{\infty}\widetilde{A}_n^c\Big)\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}\mu^+(\widetilde{A}_n^c)$$

$$\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^k},\ \forall\,k\in N.$$

因此，

$$\mu^+(Q)=0.$$

再由 μ^+ 的单调性，对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}(Q)$，我们有

$$\mu^+(\widetilde{A})=0.$$

另一方面，由于 μ^- 的下连续性，

$$0\leqslant\mu^-(P)=\lim_{k\to\infty}\mu^-\left(\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\&}}\widetilde{A}_n\right)$$

$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\mu^-(\widetilde{A}_{k+1})\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k+2}}=0.$$

即 $\mu^-(P)=0$ 以及对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}(P)$，

$$\mu^-(\widetilde{A})=0.$$

从而，我们有，

$$\widetilde{A}\in\mathscr{G}(P)\Rightarrow\mu(\widetilde{A})=\mu^+(\widetilde{A})$$

和

$$\widetilde{B}\in\mathscr{G}(Q)\Rightarrow\mu(\widetilde{B})=-\mu^-(\widetilde{B}).\qquad(6.1.5)$$

如果 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，则 $\widetilde{A}\cdot P\in\mathscr{G}(P)$，$\widetilde{A}\cdot Q\in\mathscr{G}(Q)$ 且

$$\widetilde{A}\cdot P\oplus\widetilde{A}\cdot Q=\widetilde{A}\quad\text{和}\quad\widetilde{A}\cdot P\&\widetilde{A}\cdot Q=\varnothing.$$

因此，我们有

$$\mu^+(\widetilde{A})=\mu(\widetilde{A})+\mu^-(\widetilde{A})=\mu(\widetilde{A}\cdot P)\qquad(6.1.6)$$

和

$$\mu^-(\widetilde{A})=\mu^+(\widetilde{A})-\mu(\widetilde{A})=-\mu(\widetilde{A}\cdot Q).\qquad(6.1.7)$$

让我们记

$$\widetilde{A}^n=\underbrace{\widetilde{A}\cdot\widetilde{A}\cdots\widetilde{A}}_{n}.$$

和

$$\widetilde{A}^*=\lim_{n\to\infty}\widetilde{A}^n.\qquad(6.1.8)$$

显然

$$\widetilde{A}^*(X)=\begin{cases}0, & \widetilde{A}(X)<1,\\1, & \widetilde{A}(X)=1.\end{cases}$$

从而 $\widetilde{A}^* \in \mathscr{G}_0$. 我们由(6.1.5)、(6.1.6)和(6.1.7)有

$$\mu^+(P) = \mu(P^2) = \mu^+(P^2)$$

和

$$\mu^-(Q) = -\mu(Q^2) = \mu^-(Q^2) \tag{6.1.9}$$

这样,我们可以得到

$$\mu^+(P^n) = \mu^+(P) \quad \text{和} \quad \mu^-(Q^n) = \mu^-(Q) \quad n \in N. \tag{6.1.10}$$

从而,由 μ 的有限性及 μ^+, μ^- 的连续性,

$$\begin{aligned}\mu^+(P^*) &= \mu^+(\lim_{n\to\infty} P^n) = \lim_{n\to\infty}\mu^+(P^n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\mu^+(P) = \mu^+(P),\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

和

$$\begin{aligned}\mu^-(Q^*) &= \mu^-(\lim_{n\to\infty} Q^n) = \lim_{n\to\infty}\mu^-(Q^n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\mu^-(Q) = \mu^-(Q).\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

又由于 P^* 和 Q^* 分别属于 $\mathscr{G}(P)$ 和 $\mathscr{G}(Q)$,所以,由(6.1.5)和 $P^* \& Q^* = \varnothing$ 知

$$\widetilde{A} \in \mathscr{G}(P^*) \Rightarrow \mu(\widetilde{A}) \geqslant 0$$

和

$$\widetilde{B} \in \mathscr{G}(Q^*) \Rightarrow \mu(\widetilde{B}) \leqslant 0. \tag{6.1.13}$$

又因为 $P \oplus Q = X$,以及(6.1.10)和(6.1.11),我们有

$$\begin{aligned}\mu(P^* \oplus Q^*) &= \mu(P^*) + \mu(Q^*) \\ &= \mu(P) + \mu(Q) = \mu(P \oplus Q) \\ &= \mu(X).\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

让我们记 $\widetilde{W} = (P^* \oplus Q^*)^c$,则 $\widetilde{W} \in \mathscr{G}$,且

$$\mu(\widetilde{W}) = \mu(X) - \mu(P^* \oplus Q^*) = 0$$

且

$$\mu^+(\widetilde{W}) = \mu^-(\widetilde{W}) = 0.$$

从而,对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}(\widetilde{W})$,我们有

$$\mu(\widetilde{A}) = \mu^+(\widetilde{A}) = \mu^-(\widetilde{A}) = 0.$$

现在,让我们令

$$P_0 = P^*, \quad Q_0 = Q^* \oplus \widetilde{W}.$$

则 $P_0 \oplus Q_0 = X$ 且 $P_0 \& Q_0 = \varnothing$ 以及 $P_0, Q \in \mathscr{G}_0$. 由(6.1.13)知该引理的结论(2)成立. 如果 $\widetilde{B} \in \mathscr{G}(Q_0)$,则

$$\widetilde{B} = \widetilde{B} \cdot Q^* \oplus \widetilde{B} \cdot \widetilde{W}.$$

从而由(6.1.13)

$$\mu(\widetilde{B}) = \mu(\widetilde{B} \cdot Q^*) + \mu(\widetilde{B} \cdot \widetilde{W}) = \mu(\widetilde{B} \cdot Q^*) \leqslant 0.$$

这样,我们就完成了该引理的证明.

证明 现在我们证明定理 6.1.1. 由定理 3.2.5 我们能够证明$\inf\limits_{\lambda>0} \mu_\lambda^-$ 是一个广义实值测度. 根据引理 6.1.1 存在 $P_0, Q_0 \in \mathscr{G}_0$ 使得

(1) $P_0 \oplus Q_0 = X$;

(2) 如果 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}(P_0)$,则$(\inf\limits_{\lambda>0} \mu_\lambda^-)(\widetilde{A}) \geqslant 0$;

(3) 如果 $\widetilde{B} \in \mathscr{G}(Q_0)$,则$(\inf\limits_{\lambda>0} \mu_\lambda^-)(\widetilde{B}) \leqslant 0$.

下面我们证明 P_0 和 Q_0 即为定理所求. 首先,如果 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}(P_0)$,则$(\inf\limits_{\lambda>0} \mu_\lambda^-)(\widetilde{A}) \geqslant 0$,所以,对于任何 $\lambda > 0$

$$\inf_{\lambda>0}(\mu_\lambda^-)(\widetilde{A}) \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{A}) \leqslant \mu_\lambda^+(\widetilde{A}),$$

从而

$$\mu(\widetilde{A}) \geqslant 0.$$

其次,如果 $\widetilde{B} \in \mathscr{G}(Q_0)$,则$(\inf\limits_{\lambda>0} \mu_\lambda^-)(\widetilde{B}) \leqslant 0$,从而,对于任何 $\lambda \in (0, 1]$, $\mu_\lambda^+(\widetilde{B}) \leqslant 0$. 假若不然,如果存在 $\lambda_0 > 0$ 使得 $\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{B}) > 0$,因此,$\mu(\widetilde{B}) \not\leqslant 0$. 再由 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(s)性,存在 $\widetilde{F} \in \mathscr{G}$ 且 $\widetilde{F} \subset \widetilde{B}$,有$(\inf\limits_{\lambda>0} \mu_\lambda^-)(\widetilde{F}) > 0$. 再由 $\widetilde{F} \subset \widetilde{B} \subset Q_0$ 知,$(\inf\limits_{\lambda>0} \mu_\lambda^-)(\widetilde{F}) \leqslant 0$. 这是矛盾的,故 $\mu(\widetilde{B}) \leqslant 0$.

定义 6.1.4 称 $\widetilde{E} \in \mathscr{G}$ 具有(M)性,如果 $\mu(\widetilde{E}) = 0$ 意味着对

任何 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$ 且 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$ 有

$$\mu(\widetilde{F})=0.$$

称 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(M)性，如果对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$ 具有(M)性.

定义 6.1.5 称 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$ 具有(N)性，如果 $\mu(\widetilde{E})\gneqq 0$，则存在 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$ 且 $\widetilde{F}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$使得 $\mu(\widetilde{F})\neq\widetilde{0}$；如果 $\mu(\widetilde{E})\lneqq 0$，则存在 $\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$ 且 $\widetilde{F}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$使得 $\mu(\widetilde{F})\neq\widetilde{0}$. 称 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(N)性，如果对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$ 具有(N)性.

引理 6.1.2 如果 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(M)性和(N)性，则 $\mathscr{G}$ 的任何两个互不相交的正集(分别地，负集)的和集仍为正集(分别地，负集).

证明 设 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$且 $\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2=\varnothing$. 则对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，有$(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)\&\widetilde{F}\in\mathscr{G}$. 如果 $\mu((\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)\&\widetilde{F})\gneqq 0$，由 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(N)性，存在 $\widetilde{E}\subset(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)\&\widetilde{F}$ 且 $\widetilde{E}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$，使得

$$\mu(\widetilde{E})<0. \tag{6.1.15}$$

又由于 $\widetilde{E}\subset(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)\&\widetilde{F}\subset\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2$，所以，

$$\widetilde{E}=(\widetilde{A}_1\oplus\widetilde{A}_2)\cap\widetilde{E}\subset(\widetilde{E}\cap\widetilde{A}_1)\oplus(\widetilde{E}\cap\widetilde{A}_2). \tag{6.1.16}$$

从而，应用命题 6.1.1，我们有

$$\widetilde{A}_1\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})\Rightarrow\mu(\widetilde{A}_1\cap\widetilde{E})\geqslant 0.$$

和

$$\widetilde{E}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})\Rightarrow\mu(\widetilde{A}_1\cap\widetilde{E})\leqslant 0.$$

故

$$\mu(\widetilde{A}_1\cap\widetilde{E})=0.$$

同理可证 $\mu(\widetilde{A}_2\cap\widetilde{E})=0$.

根据 $\widetilde{A}_1\&\widetilde{A}_2=\varnothing$ 知$(\widetilde{A}_1\cap\widetilde{E})\&(\widetilde{A}_2\cap\widetilde{E})=\varnothing$，这样，由 μ 的可加性，我们有

$$\mu((\widetilde{A}_1\cap\widetilde{E})\oplus(\widetilde{A}_2\cap\widetilde{E}))=\mu(\widetilde{A}_1\cap\widetilde{E})+\mu(\widetilde{A}_2\cap\widetilde{E})=0.$$

再应用 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(M)性及(6.1.16)我们得到

$$\mu(\widetilde{E}) = 0$$

这与(6.1.15)矛盾！从而，

$$\mu((\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2)\&\widetilde{F}) \geqslant 0.$$

即 $\widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{A}_2 \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$.

对于负集的情况，我们可以类似证明.

引理 6.1.3 μ 的任意两个正集(分别地，负集)的差集及可列个正集(分别地，负集)的并集仍为正集(分别地，负集).

证明 我们仅对正集的情况证明，负集的情况可以类似得到.

(1) 设 $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2 \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，对于任何 $\widetilde{F} \in \mathscr{G}$，我们有 $(\widetilde{A}_1 \ominus \widetilde{A}_2)\&\widetilde{F} \in \mathscr{G}$ 且 $(\widetilde{A}_1 \ominus \widetilde{A}_2)\&\widetilde{F} = (\widetilde{A}_1 \& \widetilde{A}_2^c)\&\widetilde{F} = \widetilde{A}_1 \& (\widetilde{A}_2^c \& \widetilde{F})$，再由 $\widetilde{A}_1 \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$ 及 $\widetilde{A}_2^c \& \widetilde{F} \in \mathscr{G}$ 知

$$\mu((\widetilde{A}_1 \ominus \widetilde{A}_2)\&\widetilde{F}) = \mu(\widetilde{A}_1 \& (\widetilde{A}_2^c \& \widetilde{F})) \geqslant 0.$$

即 $\widetilde{A}_1 \ominus \widetilde{A}_2 \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$.

(2) 设 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，则对于任何 $\widetilde{F} \in \mathscr{G}$ 有 $\widetilde{A}_n \& \widetilde{F} \in \mathscr{G}$ 且 $\mu(\widetilde{A}_n \& \widetilde{F}) \geqslant 0$. 由 $\mathscr{G}$ 的定义，$(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)\&\widetilde{F} \in \mathscr{G}$. 利用命题 3.1.2(3)，

$$\mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)\&\widetilde{F}) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\widetilde{A}_n \& \widetilde{F})).$$

再由命题 6.1.1(3)知，对于任何 n，$\widetilde{A}_n \& \widetilde{F} \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$.

令 $\widetilde{A}_0 = \varnothing$，$\widetilde{G}_n = \widetilde{A}_n \& \widetilde{F} \ominus \widetilde{A}_{n-1} \& \widetilde{F}$，由(1)知 $\widetilde{G}_n \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，又因为 $\{\widetilde{G}_n\}$ 是一列互不相交的模糊集合列以及

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)\&\widetilde{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\widetilde{A}_n \& \widetilde{F}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n,$$

所以 $\mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n)\&\widetilde{F}) = \mu(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{G}_n) \geqslant 0$，这样我们就证明了 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$.

定理 6.1.2 (哈恩分解定理Ⅱ)设 μ 是模糊集合上的广义模糊值测度，且 $\mu(\mathscr{G}) \in A^*$，$\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$，$\widetilde{A} \in \mathscr{G}$，如果 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有

(M)性和(N)性，则存在$\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{G}$，$\widetilde{A}\&\widetilde{B}=\varnothing$，使得$X=\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$且$\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$和$\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$.

证明 令$\widetilde{a}=\sup\limits_{\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})}\mu(\widetilde{A})$，由于$\mu(\mathscr{G})\in A^*$知$\widetilde{a}\in\mathscr{F}^*(R)$. 根据模糊数的上确界定义，对于任何自然数$n$，我们都能找到$\widetilde{A}_n\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，使得

$$\widetilde{a}<\mu(\widetilde{A}_n)+\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots,$$

令$\widetilde{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n$，由引理6.1.3知，$\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，从而

$$\mu(\widetilde{A})\leqslant\sup_{\widetilde{B}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})}\mu(\widetilde{B})=\widetilde{a}<\mu(\widetilde{A}_n)+\frac{1}{n}.$$

再由命题6.1.1(4)

$$\mu(\widetilde{A})\leqslant\widetilde{a}<\mu(\widetilde{A}_n)+\frac{1}{n}\leqslant\mu(\widetilde{A})+\frac{1}{n}.$$

令$n\to\infty$，我们得到

$$\mu(\widetilde{A})\leqslant\widetilde{a}\leqslant\mu(\widetilde{A}).$$

从而

$$\mu(\widetilde{A})=\widetilde{a}.$$

即$\widetilde{A}$为$\mathscr{G}$中所有正集中测度值最大的模糊集合，且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$. 下面我们证明$\widetilde{B}=X\ominus\widetilde{A}$为负集，也就是证明，对于任何$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$且$\widetilde{E}\subset\widetilde{B}$有$\mu(\widetilde{E})\leqslant 0$. 事实上，如果存在$\widetilde{E}_0\in\mathscr{G}$且$\widetilde{E}_0\subset\widetilde{B}$使得$\mu(\widetilde{E}_0)\not\leqslant 0$. 由于$\mathscr{G}$关于$\mu$具有$(N)$性，一定存在$\widetilde{E}_1\subset\widetilde{E}_0$且$\widetilde{E}_1\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$使得$\mu(\widetilde{E}_1)\neq 0$.

另一方面，由于$\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$且$\widetilde{A}\&\widetilde{E}_1\subset\widetilde{A}\&\widetilde{B}=\varnothing$，即$\widetilde{A}\&\widetilde{E}_1=\varnothing$，这样根据$\mathscr{G}$关于$\mu$具有$(M)$性，由引理3.2知$\widetilde{A}\oplus\widetilde{E}_1\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$. 又因为$\mu(\widetilde{E}_1)\neq 0$，所以

$$\mu(\widetilde{A}\oplus\widetilde{E}_1)=\mu(\widetilde{A})+\mu(\widetilde{E}_1)>\mu(\widetilde{A})=\widetilde{a}$$

这与$\widetilde{a}$的定义相矛盾！这样我们就证明了对于任何$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$且$\widetilde{E}\subset\widetilde{B}$

有 $\mu(\widetilde{E})\leqslant 0$. 从而 $\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$.

定理 6.1.3 设 μ 是模糊集合上的广义模糊值测度且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G})$，如果 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有 (M) 性，则 μ 具有哈恩分解的充要条件为 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有 (N) 性.

证明 充分性，见定理 3.1.2.

必要性，设 $\widetilde{A},\widetilde{B}$ 为 X 关于 μ 的哈恩分解，即 $X=\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$，$\widetilde{A}\&\widetilde{B}=\varnothing$，$\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$ 和 $\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$. 对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，如果 $\mu(\widetilde{E})\neq 0$，则 $\mu(\widetilde{E})\geqq\!\!\!\!/\ 0$ 或 $\mu(\widetilde{E})\not\leqq 0$. 下面我们证明，当 $\mu(\widetilde{E})\geqq\!\!\!\!/\ 0$ 时，我们有 $\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B})\neq 0$. 事实上，假若不然，则

$$
\begin{aligned}
\mu(\widetilde{E}) &= \mu((\widetilde{E}\cdot\widetilde{A})\oplus(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B})) \\
&= \mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}) \\
&= \mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

与 $\mu(\widetilde{E})\geqq\!\!\!\!/\ 0$ 矛盾！故 $\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B})\neq 0$，且 $\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}\subset\widetilde{B}$，从而

$$\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G}).$$

同理可证，当 $\mu(\widetilde{E})\not\leqq 0$ 时，我们有 $\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$ 且

$$\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A})\neq 0.$$

故 $\widetilde{E}$ 具有 (N) 性，从而 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有 (N) 性.

定理 6.1.4 设 μ 为模糊集合上的广义模糊值测度，且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G})$，$\mathscr{G}$ 关于 μ 具有 (M) 性，则存在互不相交的模糊集 $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}$ 使得 $X=\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}\oplus\widetilde{C}$，其中 $\widetilde{A}\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，$\widetilde{B}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$，$\widetilde{C}$ 为关于 μ 不具有 (N) 性的集合.

证明 对于 μ，类似于定理 6.1.2 的证明，可以得到 $\widetilde{A}\in\mathscr{M}_-(\mathscr{G})$，使得对于任何 $\widetilde{A}_t\in\mathscr{M}_+(\mathscr{G})$，有

$$\mu(\widetilde{A}_t)\leqslant\mu(\widetilde{A}),(t\in T).$$

对于 μ 的任何一个负集 $\widetilde{B}_s(s\in S)$，对于任何 $\widetilde{F}\in\mathscr{G}$，应有

$$\mu(\widetilde{B}_s\&\widetilde{F})\leqslant 0.$$

从而

$$(-\mu)(\widetilde{B}_t \& \widetilde{F}) \geqslant 0,$$

即 $\widetilde{B}_t$ 为 $-\mu$ 的正集. 类似定理 6.1.2 的证明,可以找到 $-\mu$ 的正集 $\widetilde{B}$ 满足:对于任何 $\widetilde{B}_t \in \mathscr{M}_-(\mathscr{G})$,$(-\mu)(\widetilde{B}_t) \leqslant (-\mu)(\widetilde{B})$.

我们令

$$\widetilde{C} = X \ominus \widetilde{A} \ominus \widetilde{B},$$

下面我们证明 $\widetilde{C}$ 关于 μ 不具有(N)性. 事实上,假若不然,不妨设存在 $\widetilde{C}$ 的正子集 $\widetilde{E}$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}) \neq 0.$$

则 $\widetilde{A} \& \widetilde{E} = \varnothing$,且 $\widetilde{A} \oplus \widetilde{E} \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$ 及

$$\mu(\widetilde{A} \oplus \widetilde{E}) = \mu(\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{E}) > \mu(\widetilde{A}),$$

这与 $\widetilde{A}$ 的定义相矛盾! 如果存在 $\widetilde{C}$ 的负子集 $\widetilde{E}$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}) \neq 0,$$

则 $\widetilde{B} \& \widetilde{E} = \varnothing$,且 $\widetilde{B} \oplus \widetilde{E} \in \mathscr{M}_-(\mathscr{G})$,且

$$(-\mu)(\widetilde{B} \oplus \widetilde{E}) = (-\mu)(\widetilde{B}) + (-\mu)(\widetilde{E}) > (-\mu)(\widetilde{B}).$$

这与对于任何 $\widetilde{B}_t \in \mathscr{M}_-(\mathscr{G})$,

$$(-\mu)(\widetilde{B}_t) \leqslant (-\mu)(\widetilde{B})$$

相矛盾! 因此,$\widetilde{C}$ 不存在测度非零的正子集和负子集,即 $\widetilde{C}$ 关于 μ 不具有(N)性.

定理 6.1.5 设 μ 为模糊集合上的广义模糊值测度,$\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ ($\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G}$),并且 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(M)性,如果存在互不相交的模糊集 $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ 使得 $X = \widetilde{A} \oplus \widetilde{B} \oplus \widetilde{C}$,其中 $\widetilde{A} \in \mathscr{M}_+(\mathscr{G})$,$\widetilde{B} \in \mathscr{M}_-(\mathscr{G})$,$\widetilde{C}$ 关于 μ 不具有(N)性,则 $\widetilde{C} = \varnothing$ 的充分必要条件为 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(N)性.

证明 由定理 6.1.4 和定理 6.1.3 得到.

一般地,如果模糊集合上的广义模糊值测度具有哈恩分解,则这种分解并不唯一. 如果广义模糊值测度存在两个哈恩分解 $X = \widetilde{A}_1 \oplus \widetilde{B}_1$ 和 $X = \widetilde{A}_2 \oplus \widetilde{B}_2$,则对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{G}$,有

$$\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_1)=\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_2) \quad 和 \quad \mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}_1)=\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}_2).$$

事实上，由于 $\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2)\subset\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_1$ 可知

$$\mu(\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2))\geqslant 0.$$

同样，由于 $\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2)\subset\widetilde{E}(X\ominus\widetilde{A}_2)=\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}_2$ 知

$$\mu(\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2))\leqslant 0,$$

结合两方面，我们有

$$\mu(\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2))=0.$$

同理可证

$$\mu(\widetilde{E}(\widetilde{A}_2\ominus\widetilde{A}_1))=0.$$

另一方面，因为

$$\widetilde{A}_1\cup\widetilde{A}_2=(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2)\oplus\widetilde{A}_2=(\widetilde{A}_2\ominus\widetilde{A}_1)\oplus\widetilde{A}_1,$$

所以

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\cup\widetilde{A}_2)) &=\mu(\widetilde{E}\cdot((\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2)\oplus\widetilde{A}_2))\\ &=\mu((\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2))\oplus(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_2))\\ &=\mu(\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\ominus\widetilde{A}_2))+\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_2)\\ &=\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_2).\end{aligned}$$

同理可得

$$\mu(\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}_1\cup\widetilde{A}_2))=\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_1).$$

从而

$$\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_1)=\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}_2).$$

类似可证

$$\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}_1)=\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}_2).$$

由上述结果，如果 μ 为模糊集合上的广义模糊值测度，且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G})$，以及 $\mathscr{G}$ 关于 μ 具有(M)性和(N)性，我们在 $\mathscr{G}$ 上定义

$$\mu^+(\widetilde{E})=\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}),\ \mu^-(\widetilde{E})=-\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B}),\ (\forall\ \widetilde{E}\in\mathscr{G}),$$

则对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，

$$\mu(\widetilde{E}) - \mu(\widetilde{E}\cdot(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})) - \mu(\widetilde{A}\cdot\widetilde{E}) + \mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B})$$
$$= \mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}) - (-\mu)(\widetilde{E}\cdot\widetilde{B})$$
$$= \mu^{+}(\widetilde{E}) - \mu^{-}(\widetilde{E}),$$

即

$$\mu(\widetilde{E}) = \mu^{+}(\widetilde{E}) - \mu^{-}(\widetilde{E}).$$

$\mu^{+}(\widetilde{E})$和$\mu^{-}(\widetilde{E})$唯一确定两个大于等于零的模糊数.我们分别称μ^{+}和μ^{-}为μ的上变差和下变差.令

$$\mu^{*} = \mu^{+} + \mu^{-}.$$

则称μ^{*}为μ的全变差.可以证明,μ^{*}为$\mathscr{G}$上的模糊值测度.因此,我们有

定理 6.1.6 (约当分解定理)设μ为模糊集合上的广义模糊值测度,$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G})$,如果$\mathscr{G}$关于$\mu$具有$(M)$性及$(N)$性,则$\mu$可以分解为它的上、下变差之差,即对于任何$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$,

$$\mu(\widetilde{E}) = \mu^{+}(\widetilde{E}) - \mu^{-}(\widetilde{E}).$$

推论 6.1.1 设μ为模糊集合上的广义模糊值测度,$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G})$,如果$\mathscr{G}$关于$\mu$具有$(M)$性和$(N)$性,则对于任何$\widetilde{E}\in\mathscr{G}$,

$$\mu^{+}(\widetilde{E}) = \sup\{\mu(\widetilde{F});\ \widetilde{F}\in\mathscr{G}(\widetilde{E})\},$$
$$\mu^{-}(\widetilde{E}) = -\inf\{\mu(\widetilde{F});\ \widetilde{F}\in\mathscr{G}(\widetilde{E})\}.$$

证明 设$X=\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$为$\mu$的哈恩分解,则对于任何$\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$,有

$$\mu(\widetilde{F}) = \mu(\widetilde{F}\cdot\widetilde{A}) + \mu(\widetilde{F}\cdot\widetilde{B}),$$

由于$\mu(\widetilde{F}\cdot\widetilde{B})\leqslant 0$,所以,

$$\mu(\widetilde{F}) \leqslant \mu(\widetilde{F}\cdot\widetilde{A}).$$

又根据模糊值测度的单调性,

$$\mu^{+}(\widetilde{E}) \geqslant \mu^{+}(\widetilde{F}).$$

因此,对于任何$\widetilde{F}\subset\widetilde{E}$且$\widetilde{F}\in\mathscr{G}$,

$$\mu^{+}(\widetilde{E}) \geqslant \mu^{+}(\widetilde{F}) = \mu(\widetilde{F}\cdot\widetilde{A}) \geqslant \mu(\widetilde{F}).$$

另一方面，因为 $\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}\subset\widetilde{E}$，且

$$\mu(\widetilde{E}\cdot\widetilde{A}) = \mu^+(\widetilde{E}),$$

从而，我们有

$$\mu^+(\widetilde{E}) = \sup\{\mu(\widetilde{F});\widetilde{F}\in\mathscr{G}(\widetilde{E})\}.$$

同理可证

$$\mu^-(\widetilde{E}) = -\inf\{\mu(\widetilde{F});\widetilde{F}\in\mathscr{G}(\widetilde{E})\}.$$

注 6.1.1 根据定理 6.1.1，对于 $\mathscr{G}$ 只要求具有(S)性，我们一样可以得到上述两种形式的约当分解，此时，

$$\mu^+(\widetilde{E}) = \mu(\widetilde{E}\cdot P_0) \quad 和 \quad \mu^-(\widetilde{E}) = -\mu(\widetilde{E}\cdot Q_0),$$

其中 P_0 和 Q_0 为经典集.

6.2 广义模糊值测度的绝对连续

定义 6.2.1 设 μ,ν 为模糊集合上的广义模糊值测度，我们称 ν 关于 μ 是绝对连续的，记为 $\nu\ll\mu$，如果对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$\mu^*(\widetilde{A})=0$，有 $\nu(\widetilde{A})=0$.

定理 6.2.1 设 μ,ν 为模糊集合上的广义模糊值测度，$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$ 和 $\nu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$ ($\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G}$)，及 $\mu^*(\mathscr{G})\in A^*$，$\nu^*(\mathscr{G})\in A^*$，如果 $\mathscr{G}$ 关于 μ 和 ν 具有(S)性.则以下命题等价：

(1) $\nu\ll\mu$;

(2) 对任何 $\lambda\in(0,1]$，$\nu_\lambda^-\ll\mu$ 和 $\nu_\lambda^+\ll\mu$;

(3) $\nu^+\ll\mu$ 和 $\nu^-\ll\mu$;

(4) $\nu^*\ll\mu^*$;

(5) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使得对于 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，$\mu^*(\widetilde{E})<\delta(\varepsilon)$ 时有 $\nu^*(\widetilde{E})<\varepsilon$.

证明

(1) $\Leftrightarrow$(2) 由模糊数的定义是显然的.

(1)⇒(3) 设(1)成立，则当 $\mu^*(\widetilde{E})=0,\widetilde{E}\in\mathscr{G}$，有 $\nu(\widetilde{E})=0$. 因为 $\mathscr{G}$ 关于 ν 具有(S)性，根据定理 6.1.1，存在 X 关于 ν 的哈恩分解，即 $X=P_0\oplus Q_0, P_0\&Q_0=\varnothing$. 对于 μ^*，我们有

$$0\leqslant\mu^*(\widetilde{E}\cdot P_0)\leqslant\mu^*(\widetilde{E})=0$$

和

$$0\leqslant\mu^*(\widetilde{E}\cdot Q_0)\leqslant\mu^*(\widetilde{E})=0,$$

因此有

$$\nu^+(\widetilde{E})=\nu(\widetilde{E}\&P_0)=0$$

和

$$\nu^-(\widetilde{E})=-\nu(\widetilde{E}\&Q_0)=0.$$

故

$$\nu^+\ll\mu\quad 和\quad \nu^-\ll\mu.$$

(3)⇒(1) 由 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 即得.

(3)⇒(4) 由于 μ^* 是 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度，所以，$(\mu^*)^*=\mu^*$，从而(4)可以由(3)直接推出.

(4)⇒(3) 因 $(\mu^*)^*=\mu^*$，所以，如果(4)成立，则对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$(\mu^*)^*(\widetilde{A})=\mu^*(\widetilde{A})=0$，有

$$(\nu^*)^*(\widetilde{A})=\nu^*(\widetilde{A})=0,$$

即

$$\nu^+(\widetilde{A})+\nu^-(\widetilde{A})=0.$$

再根据 ν^+ 和 ν^- 都是模糊值测度，从而由它们的非负性，我们有，

$$\nu^+(\widetilde{A})=\nu^-(\widetilde{A})=0,$$

即

$$\nu^+\ll\mu\quad 和\quad \nu^-\ll\mu.$$

(4)⇒(5) 设(4)成立，如果(5)不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对于任何 $\delta>0$，都存在 $\widetilde{E}_{(\delta)}\in\mathscr{G}$，$\mu^*(\widetilde{E}_{(\delta)})<\delta$ 但是 $\nu^*(\widetilde{E}_\delta)\not<\varepsilon_0$. 我们记

$$\widetilde{E}_n=\widetilde{E}_{\left(\frac{1}{2^n}\right)},\quad 和\quad \widetilde{E}=\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k,$$

则 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$,根据定理 3.2.2 和命题 3.2.5,有

$$\begin{aligned}0\leqslant\mu^*(\widetilde{E})&=\mu^*(\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k)\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu^*(\widetilde{E}_k)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=0.\end{aligned}$$

故

$$\mu^*(\widetilde{E})=0.$$

再由模糊数极限的保序性和模糊值测度的单调性,有

$$\begin{aligned}\nu^*(\widetilde{E})=\nu^*(\lim_{n\to\infty}\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k)&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\nu^*(\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k)\\&\geqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\nu^*(\widetilde{E}_n).\end{aligned}$$

因为对于任何 n,$\nu^*(\widetilde{E}_n)\not<\varepsilon_0$,所以

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\nu^*(\widetilde{E}_n)\not<\varepsilon_0.$$

从而

$$\nu^*(\widetilde{E})\not<\varepsilon_0$$

故

$$\nu^*(\widetilde{E})\neq 0.$$

这与 $\nu^*\ll\mu^*$ 矛盾! 因此(5)成立.

(5)⇒(4) 设(5)成立.设 $\widetilde{E}\in\mathscr{G}$ 且 $\mu^*(\widetilde{E})=0$.则对于任何 $\varepsilon=\frac{1}{n}>0$.存在 $\delta(\varepsilon)>0$,由 $\mu^*(\widetilde{E})=0<\delta(\varepsilon)$ 及(5)知

$$0\leqslant\nu^*(\widetilde{E})<\varepsilon=\frac{1}{n}.$$

故

$$0\leqslant\nu^*(\widetilde{E})\leqslant 0,$$

即

$$\nu^* \ll \mu^*.$$

定义 6.2.2 设 μ 和 ν 都是 $\mathscr{G}$ 上的广义模糊值测度，我们称 ν 关于 μ 是奇异的，记为 $\nu \perp \mu$，如果存在 $\widetilde{E} \in \mathscr{G}$ 使得

$$\mu^*(\widetilde{E}) = \nu^*(\widetilde{E}^c) = 0.$$

命题 6.2.1 设 μ, ν_1, ν_2 都是 $\mathscr{G}$ 上的广义模糊值测度，对任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$ 有 $\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$，$\nu_1(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu_2(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$，如果 $\mathscr{G}$ 关于 μ 和 ν_1，ν_2 和 $\nu_1+\nu_2$，$\nu_1-\nu_2$ 具有 (S) 性，则

(1) $\nu_1 \perp \mu \Leftrightarrow \mu \perp \nu_1$；

(2) $\nu_1 \perp \mu$ 和 $\nu_2 \perp \mu \Leftrightarrow \mu \perp (\nu_1 + \nu_2)$；

(3) $\nu_1 \perp \mu$ 和 $\nu_2 \perp \mu \Leftrightarrow \mu \perp (\nu_1 - \nu_2)$.

证明

(1) 因为 $(\widetilde{E}^c)^c = \widetilde{E}$，所以 (1) 显然成立.

(2) 因为 $\nu_i \perp \mu$，则存在 $\widetilde{E}_i \in \mathscr{G}$ 使得

$$\mu^*(\widetilde{E}_i) = \nu_i^*(\widetilde{E}_i^c) = 0,\ i = 1, 2.$$

因此，对于任何 $\widetilde{A} \subset \widetilde{E}_i$，$\widetilde{A} \in \mathscr{G}$ 有

$$\mu^*(\widetilde{A}) = 0. \tag{6.2.1}$$

和对于任何 $\widetilde{B} \subset \widetilde{E}_i^c$，$i=1,2$，$\widetilde{B} \in \mathscr{G}$ 有

$$\nu_i^*(\widetilde{B}) = 0. \tag{6.2.2}$$

又由于 $\mathscr{G}$ 关于 $\nu_1+\nu_2$ 具有 (S) 性，根据定理 6.1.1，存在 X 关于 $\nu_1+\nu_2$ 的经典集合的哈恩分解 P_0 和 Q_0 使得

$$X = P_0 \oplus Q_0 \quad 且 \quad P_0 \& Q_0 = \varnothing.$$

则对于任何 $\widetilde{E} \subset \widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2^c$，我们有

$$\begin{aligned}(\nu_1 + \nu_2)^*(\widetilde{E}) &= (\nu_1 + \nu_2)^-(\widetilde{E}) + (\nu_1 + \nu_2)^-(\widetilde{E}) \\ &= (\nu_1 + \nu_2)(\widetilde{E} \cdot P_0) + (\nu_1 + \nu_2)(\widetilde{E} \cdot Q_0) \\ &= \nu_1(\widetilde{E} \cdot P_0) + \nu_2(\widetilde{E} \cdot P_0) + \nu_1(\widetilde{E} \cdot Q_0) \\ &\quad + \nu_2(\widetilde{E} \cdot Q_0)\end{aligned}$$

$$\leqslant \nu_1^+(\widetilde{E}) + \nu_2^+(\widetilde{E}) + \nu_1^-(\widetilde{E}) + \nu_2^-(\widetilde{E})$$

$$= \nu_1^*(\widetilde{E}) + \nu_2^*(\widetilde{E}) = 0. \qquad (6.2.3)$$

对于 $D \subset \widetilde{E}_1 \cdot \widetilde{E}_2 = (X \ominus \widetilde{E}_1^c) \cdot (X \ominus \widetilde{E}_2^c) = \widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2^c \oplus \widetilde{E}_1 \cdot \widetilde{E}_2^c \oplus$ $\widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2$，我们有

$$0 \leqslant \mu^*(\widetilde{E}) \leqslant \mu^*(\widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2^c \oplus \widetilde{E}_1 \cdot \widetilde{E}_2^c \oplus \widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2)$$

$$\leqslant \mu^*(\widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2^c) + \mu^*(\widetilde{E}_1 \cdot \widetilde{E}_2^c) + \mu^*(\widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2).$$

由(6.2.1)式我们得到

$$\mu^*(\widetilde{E}) = 0. \qquad (6.2.4)$$

因此，我们取 $\widetilde{E} = \widetilde{E}_1^c \cdot \widetilde{E}_2^c$，由(6.2.3)和(6.2.4)知

$$\mu^*(\widetilde{E}^c) = (\nu_1 + \nu_2)^*(\widetilde{E}) = 0.$$

即

$$(\nu_1 + \nu_2) \perp \mu.$$

(3) 类似(2)可以证明.

定理 6.2.2 设 μ, ν 是 $\mathscr{G}$ 上的广义模糊值测度，$\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ ($\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G}$) 及 $\mu^*(\mathscr{G}) \in A^*$，$\nu^*(\mathscr{G}) \in A^*$，如果 $\mathscr{G}$ 关于 μ 和 ν 具有(S)性，则以下命题等价：

(1) $\nu \perp \mu$;

(2) 存在 $A \in \mathscr{G}_0$ 使得 $\mu^*(A) = 0 = \nu^*(A^c)$;

(3) $\nu^+ \perp \mu$ 和 $\nu^- \perp \mu$;

(4) $\nu^* \perp \mu^*$.

证明

(1)⇒(2) 因为 $\nu \perp \mu$，所以，存在 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$ 使得

$$\mu^*(\widetilde{A}) = 0 = \nu^*(\widetilde{A}^c).$$

对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{G}$，我们有

$$\nu^*(\widetilde{E}) = \nu^*(\widetilde{E} \cdot \widetilde{A}) + \nu^*(\widetilde{E} \cdot \widetilde{A}^c),$$

又由于 $0 \leqslant \nu^*(\widetilde{E} \cdot \widetilde{A}^c) \leqslant \nu^*(\widetilde{A}^c) = 0$，从而

$$\nu^*(\widetilde{E}) = \nu^*(\widetilde{E} \cdot \widetilde{A}).$$

我们一直进行下去，我们得到

$$\nu^*(\widetilde{E}) = \nu^*(\widetilde{E} \cdot \widetilde{A}^n),\ n = 1,2,\cdots. \qquad (6.2.5)$$

我们定义

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}^n.$$

显然 $A_0 \in \mathscr{G}_0$，且

$$\mu^*(A_0) = \mu^*(\lim_{n\to\infty} \widetilde{A}^n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu^*(\widetilde{A}^n).$$

再由 $\widetilde{A}^n \subset \widetilde{A}$ 及 $\mu^*(\widetilde{A})=0$ 和 μ^* 的单调性，我们有

$$\mu^*(A_0) = 0.$$

另一方面，根据(6.2.5)，有

$$\nu^*(A_0^c) = \nu^*(A_0^c \cdot \widetilde{A}^n) \quad n = 1,2,\cdots.$$

从而由 $A_0^c \cdot \widetilde{A}^n \to A_0^c \cdot A_0 = \varnothing$ 知

$$\begin{aligned}\nu^*(A_0^c) &= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \nu^*(A_0^c \cdot \widetilde{A}^n) \\ &= \nu^*(\lim_{n\to\infty}(A_0^c \cdot \widetilde{A}^n)) = \nu^*(\varnothing) = 0.\end{aligned}$$

(2)⇒(1) 显然.

(1)⇒(3) 由 $\nu^* = \nu^+ + \nu^-$，$(\nu^+)^* = \nu^+$，$(\nu^-)^* = \nu^-$ 即得.

(3)⇒(1) 由于 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 知，$\mathscr{G}$ 关于 $\nu^+ - \nu^-$ 具有(S)性，应用命题 6.2.1(3)知 $\nu \perp \mu$.

(1)⇔(4) 由 $(\mu^*)^* = \mu^*$ 及 $(\nu^*)^* = \nu^*$ 即得.

定理 6.2.3 设 μ 和 ν 都是 $\mathscr{G}$ 上的广义模糊值测度，$\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ $(\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G})$ 及 $\mu^*(\mathscr{G}) \in A^*$，$\nu^*(\mathscr{G}) \in A^*$，如果 $\mathscr{G}$ 关于 μ 和 ν 具有(S)性，且 $\nu \ll \mu$ 和 $\nu \perp \mu$，则对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{G}$，有 $\nu(\widetilde{E}) = 0$.

证明 因为 $\nu \ll \mu$，由定理 6.2.1，对于 $\frac{1}{n} > 0$，存在 $\delta\left(\frac{1}{n}\right) > 0$，使得对于任何 $\widetilde{F} \in \mathscr{G}$，当 $\mu^*(\widetilde{F}) < \delta\left(\frac{1}{n}\right)$ 时，有

$$\nu^*(\widetilde{F}) < \frac{1}{n}.$$

又由于 $\nu \perp \mu$，所以存在 $\widetilde{A} \in \mathscr{G}$ 使得

$$\mu^{*}(\widetilde{A}) = \nu^{*}(\widetilde{A}^{c}) = 0.$$

即

$$\mu^{*}(\widetilde{A}) = 0 < \delta\left(\frac{1}{n}\right),$$

从而

$$\nu^{*}(\widetilde{A}) < \frac{1}{n}.$$

再由于 n 的任意性，

$$\nu^{*}(\widetilde{A}) = 0.$$

因此，对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{G}$，由 $\widetilde{E} \cdot \widetilde{A} \subset \widetilde{A}, \widetilde{E} \cdot \widetilde{A}^{c} \subset \widetilde{A}^{c}$ 知

$$\begin{aligned}\nu^{*}(\widetilde{E}) &= \nu^{*}(\widetilde{E} \cdot \widetilde{A}) + \nu^{*}(\widetilde{E} \cdot \widetilde{A}^{c}) \\ &\leqslant \nu^{*}(\widetilde{A}) + \nu^{*}(\widetilde{A}^{c}) = 0,\end{aligned}$$

故

$$\nu^{+}(\widetilde{E}) + \nu^{-}(\widetilde{E}) = \nu^{*}(\widetilde{E}) = 0.$$

这样，我们就证明了

$$\nu(\widetilde{E}) = \nu^{+}(\widetilde{E}) - \nu^{-}(\widetilde{E}) = 0.$$

6.3 广义模糊值测度的勒贝格分解与拉东-尼古丁表示定理

引理 6.3.1 设 μ 和 ν 都是 $\mathscr{G}$ 上模糊值测度，$\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$（$\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G}$）及 $\mu^{*}(\mathscr{G}) \in A^{*}$ 和 $\nu^{*}(\mathscr{G}) \in A^{*}$，如果对于任何实数 $q \geqslant 0$，$\mathscr{G}$ 关于 $\nu - q \cdot \mu$ 具有 (S) 性，则对于任何实数 $r > 0$，存在 X 的经典集可列分划 $\{S_k\}_{k \in N_0} \subset \mathscr{G}_0$ 使得

$$\mu(S_0) = 0,$$

及对于任何 $k \in N_0 = N \cup \{0\}$ 和 $\widetilde{M} \in \mathscr{G}(S_k)$，我们有

$$r \cdot (k-1) \cdot \mu(\widetilde{M}) \leqslant \nu(\widetilde{M}) \leqslant r \cdot k \cdot \mu(\widetilde{M}).$$

证明 对于任何的 $k\in N_0$，我们定义 $\alpha_k=\nu-r\cdot k\mu$，由定理 6.1.1 知存在 X 关于 α_k 的哈恩分解 $X=P_k\oplus P_k^c$，我们令

$$Q_n=\bigoplus_{k=n}^{\infty}P_k\in\mathscr{G}_0,\quad n=1,2,\cdots.$$

对于每个正整数 n，我们定义

$$P_k^*=P_n \qquad k=n$$
$$=P_k\ominus\bigoplus_{i=1}^{k-1}P_i,\quad k>n.$$

则 $\{P_k^*\}$ 是一列互不相交列，且

$$Q_n=\bigoplus_{k=n}^{\infty}P_k^*,\ n=1,2,\cdots.$$

如果 $\widetilde{M}\in\mathscr{G}(Q_n)$，我们记

$$\widetilde{M}_k=\widetilde{M}\cdot P_k^*,$$

则 $\{\widetilde{M}_k\}_{k\geqslant n}$ 是 $\mathscr{G}$ 中的一列互不相交的模糊集合，且

$$\widetilde{M}=\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{M}_k.$$

又由于 $\widetilde{M}_k\in\mathscr{G}(P_k)$，$k\geqslant n$，则

$$\alpha_k(\widetilde{M}_k)\geqslant 0,\quad k\geqslant n.$$

即

$$\nu(\widetilde{M}_k)-rk\mu(\widetilde{M}_k)\geqslant 0.$$

再由模糊数的性质，

$$\nu(\widetilde{M}_k)\geqslant r\cdot k\mu(\widetilde{M}_k).$$

从而

$$\nu(\widetilde{M})=\nu(\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{M}_k)=\sum_{k=n}^{\infty}\nu(\widetilde{M}_k)$$

$$\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}r\cdot k\mu(\widetilde{M}_k)=r\sum_{k=n}^{\infty}k\mu(\widetilde{M}_k)$$

$$\geqslant r\cdot n\sum_{k=n}^{\infty}\mu(\widetilde{M}_k)=r\cdot n\mu(\bigoplus_{k=n}^{\infty}\widetilde{M}_k)$$

$$=r \cdot n\mu(\widetilde{M}), \qquad n-1,2,\cdots,$$

因此，对于任何自然数 n，我们有

$$\widetilde{M} \in \mathscr{G}(Q_n) \Rightarrow \nu(\widetilde{M}) \geqslant r \cdot n \cdot \mu(\widetilde{M}). \qquad (6.3.1)$$

又由于如果 $\widetilde{M} \subset Q_n^c \subset P_n^c$，则根据定理 6.1.1

$$\widetilde{M} \in \mathscr{G}(Q_n^c) \Rightarrow \nu(\widetilde{M}) \leqslant r \cdot n \cdot \mu(\widetilde{M}). \qquad (6.3.2)$$

显然$\{Q_n\}$是一个单调减的经典集序列，且 $Q_n \in \mathscr{G}_0$，我们定义

$$S_0 = \lim_{n\to\infty} Q_n,\ S_1 = Q_1^c$$

和

$$S_k = Q_{k-1} \cdot Q_k^c, \qquad (k > 1).$$

则 $S_k \in \mathscr{G}_0, k \in N_0$ 及 $X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k$.

如果 $k>1$ 和 $\widetilde{M} \in \mathscr{G}(S_k)$，

则

$$\widetilde{M} \in \mathscr{G}(Q_{k-1} \cdot Q_k^c) \subset \mathscr{G}(Q_{k-1}).$$

同样有

$$\widetilde{M} \in \mathscr{G}(Q_k^c).$$

由(6.3.1)和(6.3.2)即得

$$r(k-1)\mu(\widetilde{M}) \leqslant \nu(\widetilde{M}) \leqslant r \cdot k \cdot \mu(\widetilde{M}).$$

如果 $k=1$ 和 $\widetilde{M} \in \mathscr{G}(S_1)$，则

$$\widetilde{M} \in \mathscr{G}(Q_1^c) \subset \mathscr{G}(P_1^c),$$

因此，$\widetilde{M} \subset P_1^c$. 从而由 ν 的非负性及(6.3.2)，有

$$\nu(\widetilde{M}) \leqslant r \cdot \mu(\widetilde{M}).$$

如果 $k=0$，由 $S_0 = \lim_{n\to\infty} Q_n$ 及 Q_n 是单调减的，有

$$S_0 \in \mathscr{G}(Q_k), \qquad (k \in N).$$

所以，由(6.3.1)知

$$\nu(S_0) \geqslant r \cdot k\mu(S_0), \qquad (k \in N).$$

即

$$0 \leqslant \mu(S_0) \leqslant \frac{1}{r \cdot k}\nu(S_0).$$

再由 k 的任意性,我们有

$$\mu(S_0) = 0.$$

定理 6.3.1 （勒贝格分解定理)设 μ 和 ν 都是 $\mathscr{G}$ 上的广义模糊值测度,$\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G})$ 及 $\mu^*(\mathscr{G}) \in A^*$ 和 $\nu^*(\mathscr{G}) \in A^*$,如果对于任何实数 $q \geqslant 0$,$\mathscr{G}$ 关于 ν-$q\mu$ 和 μ 具有(S)性,则存在唯一的一对 $\mathscr{G}$ 上的广义模糊值测度(ν_a,ν_S)使得 $\nu=\nu_a+\nu_S$,$\nu_a \ll \mu$,$\nu_S \perp \mu$ 且 $\nu_a(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu_S(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G})$. 进一步地,如果 μ 是 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度且 $\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G})$,则存在 $\mathscr{B}$-函数列$\{f_n\}$使得

$$\nu_a(\widetilde{M}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{M}} f_n \mathrm{d}\mu.$$

证明

(1) 唯一性. 如果存在另外一对广义模糊值测度(ν_a',ν_S')满足定理的结果,则

$$\nu = \nu_a + \nu_S = \nu_a' + \nu_S', \tag{6.3.3}$$

其中 $\nu_a \ll \mu$,$\nu_a' \ll \mu$ 和 $\nu_S \perp \mu$,$\nu_S' \perp \mu$. 由(6.3.3)知,对于任何 $\lambda \in (0,1]$,

$$\nu_{a_\lambda}^-(\cdot) + \nu_{S_\lambda}^-(\cdot) = \nu_{a_\lambda}'^-(\cdot) + \nu_{S_\lambda}'^-(\cdot) \tag{6.3.4}$$

和

$$\nu_{a_\lambda}^+(\cdot) + \nu_{S_\lambda}^+(\cdot) = \nu_{a_\lambda}'^+(\cdot) + \nu_{S_\lambda}'^+(\cdot).$$

从而

$$\nu_{a_\lambda}^-(\cdot) - \nu_{a_\lambda}'^-(\cdot) = \nu_{S_\lambda}'^-(\cdot) - \nu_{S_\lambda}^-(\cdot) \tag{6.3.5}$$

和

$$\nu_{a_\lambda}^+(\cdot) - \nu_{a_\lambda}'^+(\cdot) = \nu_{S_\lambda}'^+(\cdot) - \nu_{S_\lambda}^+(\cdot). \tag{6.3.6}$$

又由于 $\nu_S \perp \mu$ 和 $\nu_S' \perp \mu$,所以

$$\nu_{S_\lambda}^- \perp \mu, \nu_{S_\lambda}'^- \perp \mu \text{ 和 } \nu_{S_\lambda}^+ \perp \mu, \nu_{S_\lambda}'^+ \perp \mu.$$

应用命题 6.2.1，我们有

$$(\nu_{S_\lambda}'^- - \nu_{S_\lambda}^-) \perp \mu \quad \text{和} \quad (\nu_{S_\lambda}'^+ - \nu_{S_\lambda}^+) \perp \mu.$$

再由定理 6.2.1，我们得到

$$(\nu_{a_\lambda}^- - \nu_{a_\lambda}'^-) \ll \mu \quad \text{和} \quad (\nu_{a_\lambda}^- - \nu_{a_\lambda}'^+) \ll \mu.$$

因此，由定理 6.2.3 及(6.3.5)和(6.3.6)，对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{G}$，有

$$(\nu_{a_\lambda}^- - \nu_{a_\lambda}'^-)(\widetilde{E}) = (\nu_{S_\lambda}' - \nu_{S_\lambda})(\widetilde{E}) = 0$$

和

$$(\nu_{a_\lambda}^+ - \nu_{a_\lambda}'^-)(\widetilde{E}) = (\nu_{S_\lambda}'^+ - \nu_{S_\lambda}^-)(\widetilde{E}) = 0.$$

从而，我们有

$$\nu_{a_\lambda} = \nu_{a_\lambda}', \; \nu_{a_\lambda}^+ = \nu_{a_\lambda}'^+$$

和

$$\nu_{S_\lambda}^- = \nu_{S_\lambda}', \nu_{S_\lambda}^+ = \nu_{S_\lambda}'^+.$$

即

$$\nu_a = \nu_a' \quad \text{和} \quad \nu_S = \nu_S'.$$

(2) 我们只须对模糊值测度存在分解(ν_a, ν_S)证明即可. 事实上，如果 $\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty} (\forall \widetilde{A} \in \mathscr{G})$，由定理 6.2.1 和定理 6.2.2，我们只须用 μ^* 代替 μ 即可. 如果定理对于 μ 和 ν 都是 $\mathscr{G}$ 上的模糊测度且 $\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty} (\forall \widetilde{A} \in \mathscr{G})$ 成立，我们可以考虑 ν_1 为 $\mathscr{G}$ 上的广义模糊值测度，且 $\nu_1(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty} (\forall \widetilde{A} \in \mathscr{G})$，则

$$\nu_1 = \nu_1^+ - \nu_1.$$

因此，由该定理知，对于 ν_1^+ 和 ν_1^- 都存在勒贝格分解：

$$\nu_1^+ = \nu_{1_a}^+ + \nu_{1_S}^+,$$

其中，$\nu_{1_a}^+ \ll \mu$ 和 $\nu_{1_S}^+ \perp \mu$，以及

$$\nu_1^- = \nu_{1_a}^- + \nu_{1_S}^-,$$

其中，$\nu_{1_a}^- \ll \mu$ 和 $\nu_{1_S} \perp \mu$. 我们定义

$$\nu_a = \nu_{1_a}^{+} - \nu_{1_a}^{-}$$

和

$$\nu_S = \nu_{1_S}^{+} - \nu_{1_S}^{-}.$$

则 $\nu_a \ll \mu$，$\nu_S \perp \mu$ 且

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \nu_1^{+} - \nu_1^{-} = \nu_{1_a}^{+} + \nu_{1_S}^{+} - (\nu_{1_a}^{-} + \nu_{1_S}^{-}) \\ &= (\nu_{1_a}^{+} - \nu_{1_a}^{-}) + (\nu_{1_S}^{+} - \nu_{1_S}^{-}) \\ &= \nu_a + \nu_S.\end{aligned}$$

即 ν_1 存在勒贝格分解.

(3) 以下我们设 μ 和 ν 都是 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度，且 $\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ 和 $\nu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$ ($\forall\ \widetilde{A} \in \mathscr{G}$). m 为一非负整数. 由引理 6.3.1，对于 $r = 2^{-m}$，存在可列分类 $\{S_{m,k}\}_{k \in N_0} \subset \mathscr{G}_0$ 使得

$$X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_{m,k}，\ 且 \quad \mu(S_{m,0}) = 0. \qquad (6.3.7)$$

对于任何 $k > 0$，$\widetilde{M} \in \mathscr{G}(S_{m,k})$，有

$$2^{-m}(k-1) \cdot \mu(\widetilde{M}) \leqslant \nu(\widetilde{M}) \leqslant 2^{-m} k \mu(\widetilde{M}). \qquad (6.3.8)$$

设 $n, k \in N$，考虑

$$M = S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}， \qquad (6.3.9)$$

显然，$M \in \mathscr{G}(S_{m,n})$ 和 $M \in \mathscr{G}(S_{m+1,k})$. 这样，由(6.3.8)，我们有

$$\begin{aligned}&2^{-(m+1)}(k-1) \cdot \mu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}) \\ &\leqslant \nu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}) \\ &\leqslant 2^{-m} \cdot n \cdot \mu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k})\end{aligned} \qquad (6.3.10)$$

和

$$\begin{aligned}&2^{-m}(n-1) \cdot \mu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}) \\ &\leqslant \nu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}) \\ &\leqslant 2^{-(m+1)} k \cdot \mu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}).\end{aligned} \qquad (6.3.11)$$

由(6.3.10)，我们得到

$$2n \cdot \mu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}) \geqslant (k-1) \cdot \mu(S_{m,n} \cdot S_{m+1,k}) \qquad (6.3.12)$$

和由(6.3.11),我们得到

$$2(n-1)\mu(S_{m,n}\cdot S_{m+1,k})\leqslant k\cdot\mu(S_{m,n}\cdot S_{m+1,k}).\tag{6.3.13}$$

由(6.3.12)知,当 $2n<k-1$ 时,$\mu(S_{m,n}\cdot S_{m+1,k})=0$ 和由(6.3.13)知,当 $2(n-1)>k$ 时,$\mu(S_{m,n}\cdot S_{m+1,k})=0$. 故

$$\text{当 } k<2n-2 \text{ 或 } k>2n+1 \text{ 时},\mu(S_{m,n}\cdot S_{m+1,k})=0.\tag{6.3.14}$$

因此,只有当 $k=2n-2,2n-1,2n,2n+1$ 时,$\mu(S_{m,n},S_{m+1,k})$才有可能是大于零的. 使用(6.3.7),我们有

$$S_{m,n}=S_{m,n}\cdot X=\bigoplus_{k=0}^{\infty}S_{m,n}\cdot S_{m+1,k}.\tag{6.3.15}$$

让我们记

$$Q_{m,n}=\left(\bigoplus_{k=0}^{2n-3}(S_{m,n}\cdot S_{m+1,k})\right)\oplus\left(\bigoplus_{k=2n+2}^{\infty}(S_{m,n}\cdot S_{m+1,k})\right).$$

则对于任何 m,n,

$$S_{m,n}=Q_{m,n}\oplus\left(\bigoplus_{i=2n-2}^{2n+1}S_{m,n}\cdot S_{m+1,k}\right)\quad \text{且}\quad \mu(Q_{m,n})=0.\tag{6.3.16}$$

我们定义

$$P=\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty}S_{m,0}\right)\oplus\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty}\bigoplus_{n=1}^{\infty}Q_{m,n}\right),$$

则由(6.3.16)和(6.3.7)得到

$$\mu(P)=0.$$

(4) 对于任何 m,我们定义 $f_m: X\to[0,+\infty]$,

$$f_m(x)=2^{-m}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot S_{m,n}(x)\cdot P^c(x),\tag{6.3.17}$$

显然,$f_m\in\mathscr{B}_0^+$,因此,由定理 4.3.2 知 $f_m\in\widetilde{\mathscr{B}^1}$.

对于任何 $m,P\in N$,我们考虑实值简单 $\mathscr{B}$-函数

$$S_{m,P}=0\cdot P+0\cdot\left(\bigoplus_{n=1}^{P}(S_{m,n}\cdot P^c)\right)^c$$

$$+\sum_{n=1}^{P}2^{-m}(n-1)(S_{m,n}\cdot P^c). \qquad (6.3.18)$$

则 $S_{m,P}$是满足定义 5.1.2 中的条件，又由于对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，所以 $\int_{\widetilde{M}}f_m\mathrm{d}\mu$ 存在，且

$$\int_{\widetilde{M}}f_m\mathrm{d}\mu=(\widetilde{\rho})\lim_{P\to\infty}\int_{\widetilde{M}}S_{m,P}\mathrm{d}\mu. \qquad (\widetilde{M}\in\mathscr{G}) \quad (6.3.19)$$

(5) 以下我们首先证明，对于 $\widetilde{M}\in\mathscr{G}$，有

$$\nu(\widetilde{M})=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\int_{\widetilde{M}}f_m\mathrm{d}\mu+\nu(\widetilde{M}\cdot P).$$

事实上，设 $\widetilde{M}\in\mathscr{G}$，$m>0$，由(6.3.8)，我们有

$$\nu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n})\leqslant 2^{-m}\cdot n\cdot\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n}).$$

因此，

$$\nu\left(\widetilde{M}\cdot\bigoplus_{n=1}^{\infty}S_{m,n}\right)=\nu\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\widetilde{M}\cdot S_{m,n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n})$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}\cdot n\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n}). \qquad (6.3.20)$$

又因为 $S_{m,0}=\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}S_{m,n}\right)^c$，且 $\widetilde{M}\cdot P^c\subset\widetilde{M}\cdot S_{m,0}^c$，所以，由(6.3.20)得

$$\nu(\widetilde{M})=\nu(\widetilde{M}\cdot P)+\nu(\widetilde{M}\cdot P^c)$$

$$\leqslant\nu(\widetilde{M}\cdot P)+\nu(\widetilde{M}\cdot S_{m,0}^c)$$

$$=\nu(\widetilde{M}\cdot P)+\nu\left(\widetilde{M}\cdot\bigoplus_{n=1}^{\infty}S_{m,n}\right)$$

$$\leqslant\nu(\widetilde{M}\cdot P)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}\cdot n\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n}). \quad (6.3.21)$$

另一方面，由于 $\widetilde{M}\cdot P\cdot S_{m,P}\subset P$，所以，根据(6.3.8)和 $\mu(P)$

$=0$ 知

$$0 \leqslant \nu(\widetilde{M} \cdot P \cdot S_{m,P}) \leqslant 2^{-m} \cdot P \cdot \mu(\widetilde{M} \cdot P \cdot S_{m,P}) \leqslant 0,$$

即

$$\nu(\widetilde{M} \cdot P \cdot S_{m,P}) = 0, \ P \in N. \qquad (6.3.22)$$

又由于$\{\widetilde{M} \cdot P \cdot S_{m,P}\}_{P \in N}$为 $\mathscr{G}$ 中互不相交的集列，则

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{P=1}^{\infty} \nu(\widetilde{M} \cdot P \cdot S_{m,P}) \\ &= \nu(\widetilde{M} \cdot P \cdot \bigoplus_{P=1}^{\infty} S_{m,P}) \\ &= \nu(\widetilde{M} \cdot P \cdot S_{m,0}^c). \end{aligned} \qquad (6.3.23)$$

注意到 P,$S_{m,0}$都是经典集，则 $P^c \subset S_{m,0}^c$，$P^c \cdot S_{m,0}^c = P^c$. 因此，我们有

$$\begin{aligned} \nu(\widetilde{M} \cdot S_{m,0}^c) &= \nu(\widetilde{M} \cdot (P \oplus P^c) \cdot S_{m,0}^c) \\ &= \nu(\widetilde{M} \cdot P \cdot S_{m,0}^c) + \nu(\widetilde{M} \cdot P^c \cdot S_{m,0}^c) \\ &= \nu(\widetilde{M} \cdot P^c \cdot S_{m,0}^c) = \nu(\widetilde{M} \cdot P^c). \end{aligned} \qquad (6.3.24)$$

对于 $\widetilde{M} \cdot S_{m,n}$应用(6.3.8)，有

$$\nu(\widetilde{M} \cdot S_{m,n}) \geqslant 2^{-m} \cdot (n-1)\mu(\widetilde{M} \cdot S_{m,n}).$$

故

$$\begin{aligned} \nu(\widetilde{M} \cdot S_{m,0}^c) &= \nu(\widetilde{M} \cdot \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_{m,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\widetilde{M} \cdot S_{m,n}) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-m} \cdot (n-1)\mu(\widetilde{M} \cdot S_{m,n}). \end{aligned} \qquad (6.3.25)$$

从而，由(6.3.24)和(6.3.25)得到

$$\begin{aligned} \nu(\widetilde{M}) &= \nu(\widetilde{M} \cdot P) + \nu(\widetilde{M} \cdot P^c) \\ &= \nu(\widetilde{M} \cdot P) + \nu(\widetilde{M} \cdot S_{m,0}^c) \\ &\geqslant \nu(\widetilde{M} \cdot P) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-m}(n-1)\mu(\widetilde{M} \cdot S_{m,n}). \end{aligned} \qquad (6.3.26)$$

结合(6.3.21)和(6.3.26)，我们得到

$$\nu(\widetilde{M}\cdot P)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}(n-1)\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n})$$
$$\leqslant \nu(\widetilde{M})$$
$$\leqslant \nu(\widetilde{M}\cdot P)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}\cdot n\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n}). \qquad (6.3.27)$$

再由 f_m 的定义知

$$\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu=(\widetilde{\rho})\lim_{P\to\infty}\int_{\widetilde{M}} S_{m,P}\mathrm{d}\mu$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}(n-1)\mu(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n}).$$

而 $\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n})=\mu(\widetilde{M}\cdot P\cdot S_{m,n})+\mu(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n})$. 从而由 $\mu(P)=0$及 $\widetilde{M}\cdot S_{m,n}\cdot P\subset P$,知

$$\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,n})=\mu(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n}).$$

因此,(6.3.27)可以改写为

$$\nu(\widetilde{M}\cdot P)+\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu\leqslant\nu(\widetilde{M})$$
$$\leqslant\nu(\widetilde{M}\cdot P)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}\cdot n\cdot\mu(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n}). \qquad (6.3.28)$$

这样,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,有

$$\nu_\lambda^-(\widetilde{M})\leqslant\nu_\lambda^-(\widetilde{M}\cdot P)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}\cdot n\mu_\lambda^-(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n}). \qquad (6.3.29)$$

再根据定义 5.1.4,

$$\left(\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu\right)_\lambda^-=\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{M}} S_{m,n}\mathrm{d}\mu_\lambda^-$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-m}(n-1)\mu_\lambda^-(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n}),$$

从而,由(6.3.29)得到

$$\nu_\lambda^-(\widetilde{M}) \leqslant \nu_\lambda^-(\widetilde{M}\cdot P) + \left(\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu\right)_\lambda^- + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-m}\cdot \mu_\lambda^-(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n}). \quad (6.3.30)$$

同理有

$$\nu_\lambda^+(\widetilde{M}) \leqslant \nu_\lambda^+(\widetilde{M}\cdot P) + \left(\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu\right)_\lambda^+ + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-m}\mu_\lambda^+(\widetilde{M}\cdot P^c\cdot S_{m,n}). \quad (6.3.31)$$

故

$$\nu(\widetilde{M}\cdot P) + \int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(\widetilde{M}) \leqslant \nu(\widetilde{M}\cdot P) + \int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu + 2^{-m}\mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,0}^c). \quad (6.3.32)$$

再由 $\mu(S_{m,0})=0$ 及 $\widetilde{M}\cdot S_{m,0}\subset S_{m,0}$，所以

$$\mu(\widetilde{M}) = \mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,0}) + \mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,0}^c) = \mu(\widetilde{M}\cdot S_{m,0}^c).$$

代入(6.3.32)，有

$$\nu(\widetilde{M}\cdot P) + \int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(\widetilde{M}) \leqslant \nu(\widetilde{M}\cdot P) + \int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu + 2^{-m}\mu(\widetilde{M}). \quad (6.3.33)$$

令 $m\to\infty$，则

$$\nu(\widetilde{M}) = \nu(\widetilde{M}\cdot P) + (\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu.$$

(6) 最后我们证明 $\nu(\widetilde{M}\cdot P)$和 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{m\to\infty}\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu$ 即为定理所要求的 ν_S 和 ν_a. 事实上，令

$$\nu_S(\widetilde{E}) = \nu(P\cdot\widetilde{E})$$

和

$$\nu_a(\widetilde{E}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty}\int_{\widetilde{E}} f_m \mathrm{d}\mu, (\widetilde{E} \in \mathscr{G}).$$

由 P 的定义知 $\mu^*(P)=\mu(P)=0$. 又由 $P\in\mathscr{G}_0$,所以 $P\cdot P^c=\varnothing$,从而

$$\nu_S^*(P^c) = \nu_S(P^c) = \nu(P\cdot P^c) = \nu(\varnothing) = 0.$$

即 $\nu_S\perp\mu$.

如果 $\widetilde{M}\in\mathscr{G}$ 使得 $\mu^*(\widetilde{M})=\mu(\widetilde{M})=0$,由定理 5.2.5,对于任何 $m\in N$,

$$\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu = 0.$$

故

$$\nu_a(\widetilde{M}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty}\int_{\widetilde{M}} f_m \mathrm{d}\mu = 0,$$

即 $\nu_a\ll\mu$. 至此,定理全部证明.

注 6.3.1 从定理 6.3.1 的证明过程可以看出,我们所定义的序列 $\{f_m\}_{m\in N}$ 一致收敛于一非负实值 $\mathscr{B}$-函数 f,且 f 是 μ-可积的.

定理 6.3.2 设 μ_1 和 μ_2 都是 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度,$\mu_i(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$ $(\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G})$ 及 $\mu_i^*(\mathscr{G})\in A^*$ $(i=1,2)$,如果对于任何实数 $q\geqslant 0$,$\mathscr{G}$ 关于 $\mu_2-q\mu_1$ 和 μ_1 具有 (S) 性,则存在 $\mathscr{G}$ 上的模糊值测度 (ν_a,ν_s) 使得

$$\mu_2 = \nu_a + \nu_s,\ \nu_a \ll \mu_1 \quad 和 \quad \nu_s \perp \mu_1,$$

且存在一个 $f\in\mathscr{B}^+$ 使得

$$\mu_2(\widetilde{A}) = \int_{\widetilde{A}} f \mathrm{d}\mu_1, \quad \widetilde{A} \in \mathscr{G}.$$

证明 显然.

我们将上述定理变形,就得到模糊值积分的拉东-尼古丁表示定理.

定理 6.3.3 (拉东-尼古丁表示定理)设 μ_1 和 μ_2 都是 $\mathscr{G}$ 上的

模糊值测度，$\mu_i(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}(\forall\ \widetilde{A}\in\mathscr{G})$及$\mu_i^*(\mathscr{G})\in A^*\ (i=1,2)$，如果对于任何实数$q\geqslant 0$，$\mathscr{G}$关于$\mu_1$和$\mu_2-q\mu_1$具有$(S)$性，则以下命题等价.

(1) $\mu_2\ll\mu_1$；

(2) 存在μ_1-可积的$\mathscr{B}$-函数f，使得对于任何$\widetilde{A}\in\mathscr{G}$，有

$$\mu_2(\widetilde{A})=\int_{\widetilde{A}}f\mathrm{d}\mu_1.$$

证明 由定理 6.3.2 和定理 5.2.5 立即可以得到.

第 三 部 分

模糊值模糊测度与模糊值模糊积分

第 7 章 模糊值模糊测度的性质及扩张

7.1 模糊值模糊测度的定义及性质

定义 7.1.1 设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{F}(X)$，称 $\mathscr{F}$ 为一个模糊 σ-代数，如果 $\mathscr{F}$ 具有性质：

$FA1$. $\varnothing, X\in\mathscr{F}$；

$FA2$. 如果 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\in\mathscr{F}$；

$FA3$. 如果 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，则 $\widetilde{A}^c\in\mathscr{F}$.

显然，模糊集合 σ-代数一定是模糊集合模糊 σ-代数，反之不真.

定义 7.1.2 设 $\mathscr{C}$ 是任意一个模糊集类，$\mathscr{C}$ 上的一个模糊值模糊测度是一个模糊值模糊集函数 $\mu:\mathscr{C}\to\mathscr{F}_+^*(R)$，如果 μ 具有性质：

$FM1$. 如果 $\varnothing\in\mathscr{C}$，则 $\mu(\varnothing)=0$；

$FM2$. 如果 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，$\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$，则 $\mu(\widetilde{A})\leqslant\mu(\widetilde{B})$；

$FM3$. 如果 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$，$\widetilde{A}_n\subset\widetilde{A}_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\Big)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n);$$

$FM4$. 如果 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{C}$，$\widetilde{A}_n\supset\widetilde{A}_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，且存在 $n_0\geqslant1$ 使得 $\mu(\widetilde{A}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$，则

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\Big)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

如果 μ 只满足条件 $FM1$，$FM2$ 和 $FM3$，则称 μ 为下半连续模糊值模糊测度；如果 μ 只满足条件 $FM1$，$FM2$ 和 $FM4$，则称 μ 为上半

连续模糊值模糊测度.

命题 7.1.1 设 $\mathscr{C}$ 是模糊集合的可加类，μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度，$\mu(\mathscr{C})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{C}\}\in A^{*}$，则 μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值模糊测度.

证明 由定理 3.2.2 立得.

命题 7.1.2 设 $\mathscr{C}$ 是模糊集合的可加类，μ 是 $\mathscr{C}$ 上的下半连续模糊值模糊测度. 如果 μ 具有可加性，则 μ 是 $\mathscr{C}$ 上的模糊值测度.

证明 由定义 3.2.3 立得.

命题 7.1.3 设 μ 是模糊 σ-代数 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，则 μ 是穷举的.

证明 设 $\{\widetilde{E}_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中任意一个不交序列，则

$$\bigcup_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k\searrow\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k=\varnothing.$$

事实上，如果 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k\neq\varnothing$，则存在 $x_0\in X$ 使得

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty}\bigvee_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k(x_0)>0.$$

从而，对于任何 $n\geqslant1$，我们有

$$\bigvee_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k(x_0)>0.$$

因此，一定存在 $k_n\geqslant n$ 使得

$$\widetilde{E}_{k_n}(x_0)>0.$$

于是，一定存在 $n_1\neq n_2$ 使得 $k_{n_1}\neq k_{n_2}$. 这样，我们就有

$$\widetilde{E}_{k_{n_1}}(x_0)\wedge\widetilde{E}_{k_{n_2}}(x_0)>0.$$

这与 $\{\widetilde{E}_n\}$ 是不交序列相矛盾！故

$$\bigcup_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k\searrow\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\widetilde{E}_k=\varnothing.$$

根据定义 7.2，我们有

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n) \leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} \widetilde{E}_k) = \mu(\varnothing) = 0.$$

再由 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度知

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n) = 0.$$

命题 7.1.4 如果 $\mu(\mathscr{F}) = \{\mu(\widetilde{A}); \widetilde{A} \in \mathscr{F}\} \in A^*$，则 $\mu(\varliminf_{n\to\infty} \widetilde{E}_n) \leqslant (\tilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n) \leqslant (\tilde{\rho}) \varlimsup_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n) \leqslant \mu(\varlimsup_{n\to\infty} \widetilde{E}_n)$.

进一步地，如果 $\varlimsup_{n\to\infty} \widetilde{E}_n = \varliminf_{n\to\infty} \widetilde{E}_n$，则 $(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n)$ 存在，且 $(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} \widetilde{E}_n)$.

证明 因为 $\bigcap_{n=k}^{\infty} \widetilde{E}_n \nearrow$ 关于 k，则

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \widetilde{E}_n) = (\tilde{\rho}) \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcap_{n=k}^{\infty} \widetilde{E}_n).$$

又由于对于任何 $n \geqslant k$，

$$\mu(\bigcap_{n=k}^{\infty} \widetilde{E}_n) \leqslant \mu(\widetilde{E}_n),$$

所以，

$$\mu(\bigcap_{n=k}^{\infty} \widetilde{E}_n) \leqslant \inf_{n\geqslant k} \mu(\widetilde{E}_n).$$

故

$$\begin{aligned} \mu(\varliminf_{n\to\infty} \widetilde{E}_n) &= \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \widetilde{E}_n) \\ &\leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k} \mu(\widetilde{E}_n) = (\tilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n) \end{aligned}$$

同理可证

$$(\tilde{\rho}) \varlimsup_{n\to\infty} \mu(\widetilde{E}_n) \leqslant \mu(\varlimsup_{n\to\infty} \widetilde{E}_n).$$

定义 7.1.3 模糊值模糊集函数 $\mu: \mathscr{C} \to \mathscr{F}_+^*(R)$ 称为零可加的，记为 0-add.（分别地，零可减的，记为 0-sub.），如果对于任何 $\widetilde{E}, \widetilde{F} \in \mathscr{C}, \widetilde{E} \cup \widetilde{F} \in \mathscr{C}$（分别地，$\widetilde{E} \cap \widetilde{F} \in \mathscr{C}$），$\mu(\widetilde{F}) = 0$，有

$\mu(\widetilde{E} \cup \widetilde{F}) = \mu(\widetilde{E})$，（分别地，$\mu(\widetilde{E} \cap \widetilde{F}) = \mu(\widetilde{E})$）.

命题 7.1.5 如果 μ 是一个从 $\mathscr{C} \cap \mathscr{P}(X)$ 到 $\mathscr{F}_+^*(R)$ 的模糊

值集函数，则 μ 是 0-add. 充分必要条件是 μ 是 0-sub.

证明 显然.

命题 7.1.6 设 μ 是一个从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{F}_+^*(R)$ 上的模糊值模糊集函数，如果对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{C}$, $\widetilde{E}\neq\varnothing$，有 $\mu(\widetilde{E})\neq 0$，则 μ 是 0-add. 和 0-sub.

证明 由反证法立得.

定理 7.1.1 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的一个零可加的上半连续的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，则对于任何 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\widetilde{E}_n\searrow$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，$\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

证明 记 $\widetilde{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$，则由 μ 的上连续性知

$$\mu(\widetilde{E})=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0.$$

又由于 $\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n\searrow\widetilde{A}\cup\widetilde{E}$，这样，由 μ 的上连续性及零可加性，

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)=\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E})=\mu(\widetilde{A}).$$

类似地，我们有

定理 7.1.2 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的一个零可减的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，则对于任何 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\widetilde{E}_n\searrow$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$. 有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)=\mu(\widetilde{A}).$$

定义 7.1.4 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的一个模糊值模糊集函数，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，我们称 μ 为关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加的，记为 P. 0-add. $/\widetilde{A}$（分别地，伪零可减的，记为 P. 0-sub. $/\widetilde{A}$），如果对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}=\{\widetilde{A}\cap\widetilde{D};\widetilde{D}\in\mathscr{F}\}$，$\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})=\mu(\widetilde{A})$，有

$$\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)\cup\widetilde{C})=\mu(\widetilde{C}),\text{（分别地，}\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{C})=\mu(\widetilde{C})\text{）};$$

如果对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\mu$ 关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加的（分别地，伪零可减的），则称 μ 是伪零可加的，记为 P. 0-add.（分别地，伪零可减的，记为 P. 0-sub.）.

命题 7.1.7 设 μ 是 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}\cap\mathscr{P}(X)$ 上的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，则下列句子等价：

(1) μ 是 P. 0-add. $/\widetilde{A}$；

(2) μ 是 P. 0-sub. $/\widetilde{A}$；

(3) 对于任何 $\widetilde{E}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，$\mu(\widetilde{A}\backslash\widetilde{E})=\mu(\widetilde{A})$，有

$$\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{C})=\mu(\widetilde{C}).$$

证明

(1)⇒(2) 因为 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$，所以 $\widetilde{A}$ 是经典集，从而

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{C}) &=\mu((\widetilde{A}\backslash\widetilde{E})\cup(\widetilde{E}\cap\widetilde{C})\\ &=\mu((\widetilde{A}\cup(\widetilde{E}\cap\widetilde{C}))\cap(\widetilde{E}^c\cup(\widetilde{E}\cap\widetilde{C})))\\ &=\mu(\widetilde{A}\cap(\widetilde{E}^c\cup\widetilde{C}))\\ &=\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}))\\ &=\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)\cup\widetilde{C})=\mu(\widetilde{C}).\end{aligned}$$

(2)⇒(1) 设 $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，则 $\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，从而

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{C}) &=\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{C})=\mu((\widetilde{E}\cap\widetilde{C})\cup\varnothing)\\ &=\mu((\widetilde{E}\cap\widetilde{C})\cup(\widetilde{E}\cap(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)))\\ &=\mu(\widetilde{E}\cap(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)))\\ &=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)).\end{aligned}$$

(1)⇒(3) 令 $\widetilde{B}=\widetilde{A}\backslash\widetilde{E}$，$\widetilde{E}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，则 $\widetilde{B}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$ 且 $\widetilde{E}=\widetilde{A}\backslash\widetilde{B}$. 从而

$$\mu(\widetilde{A})=\mu(\widetilde{A}\backslash\widetilde{E})=\mu(\widetilde{B}).$$

这样，由(1)得

$$\mu(\widetilde{C}\cup\widetilde{E})=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\backslash\widetilde{B}))=\mu(\widetilde{C}).$$

(3)⇒(1) 令 $\widetilde{B}=\widetilde{A}\cap\widetilde{E}$，$\widetilde{F}=\widetilde{A}\backslash\widetilde{B}$，则 $\widetilde{B}=\widetilde{A}\backslash\widetilde{F}$，

$$\mu(\widetilde{A})=\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})=\mu(\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A}\backslash\widetilde{F}),$$

从而

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{C}) &=\mu(\widetilde{C}\cup\widetilde{B})\\ &=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c))\end{aligned}$$

$$=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})^c))$$
$$=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap(\widetilde{A}^c\cup\widetilde{E}^c)))$$
$$=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c)\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c))$$
$$=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)).$$

定理 7.1.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\mu$ 是 $\mathscr{F}$ 上关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加的模糊值模糊测度，$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果对于任何 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\widetilde{B}_n\uparrow$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，则对于任何 $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c))=\mu(\widetilde{C}).$$

证明 因为 $\widetilde{B}_n\nearrow$，令 $\widetilde{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n$，所以，由 μ 的下连续性，

$$\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A}\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n))$$
$$=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

又由于 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c\searrow\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c$，所以，对于任何 $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$，

$$\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\searrow\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c),$$

从而，由 μ 的上连续性及 $P.$ 0-add. $/\widetilde{A}$，

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c))$$
$$=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)))=\mu(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c))$$
$$=\mu(\widetilde{C}).$$

定理 7.1.4 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\mu$ 是 $\mathscr{F}$ 上关于 $\widetilde{A}$ 伪零可减的模糊值模糊测度，$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果对于任何 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\widetilde{B}_n\nearrow$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，则对于任何 $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{C}).$$

证明 令 $\widetilde{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n$，因 $\widetilde{B}_n\nearrow$，所以，由 μ 的下连续性，

$$\mu(\widetilde{B}\cap\widetilde{A})=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap\widetilde{B}_n))$$

$$=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}),$$

又由于对于任何 $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$,$\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_n\nearrow\widetilde{C}\cap\widetilde{B}$,从而,由 μ 的下连续性及 $P.0\text{-sub}/\widetilde{A}$,有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_n))=\mu(\widetilde{C}\cap\widetilde{B})=\mu(\widetilde{C}).$$

命题 7.1.8 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度,且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$ $\forall\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$,如果对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}_0$,$\widetilde{A}\neq\widetilde{B}$ 有 $\mu(\widetilde{A})\neq\mu(\widetilde{B})$,则 μ 是 0-add.,0-sub.,P.0-add. 和 P.0-sub..

证明 显然.

7.2 模糊值模糊测度的自连续

定义 7.2.1 设 μ 是从 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}_+^*(R)$ 的模糊值模糊集函数,称 μ 是上自连续的,记为 autoc.↓(分别地,下自连续的,记为 autoc.↑)如果对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$,$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{C}$,且 $\{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{C}$(分别地,$\{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c\}\subset\mathscr{C}$)及 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$,有

$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$,(分别地,$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)=\mu(\widetilde{A})$);

称 μ 为自连续的,记为 autoc.,如果 μ 是上自连续的,又是下自连续的.

命题 7.2.1

1) 如果 μ 是 autoc.↓,则 μ 是 0-add.;

2) 如果 μ 是 autoc.↑,则 μ 是 0 sub..

证明

1) 取 $\widetilde{B}_n=\widetilde{B}\in\mathscr{F}$,且 $\mu(\widetilde{B})=0$,则由 μ 是 autoc.↓,有

$$\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

2) 类似可证明.

命题 7.2.2 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$，如果 μ 是零上连续的和 autoc. $\downarrow$（分别地，autoc. $\uparrow$），则 μ 是上连续的（分别地，下连续的）.

证明 (1) 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，$\widetilde{A}_n\searrow$，取 $\widetilde{A}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n$，$\widetilde{B}_n=\widetilde{A}_n\setminus\widetilde{A}$，$n=1,2,\cdots$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n=\varnothing$，且 $\widetilde{B}_n\searrow$，这样由 μ 是零上连续的，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0.$$

再由 μ 的上自连续性，

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

即 μ 是上连续的.

(2) 类似可证.

定义 7.2.2 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊集函数，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta$ 时有 $\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\varepsilon$，则称 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质.

命题 7.2.3 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{F}\}\in A^*$，如果 μ 是 autoc. $\downarrow$，则 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质.

证明 如果 μ 不具有 $(p.g.p)$ 性质，则存在 $\varepsilon_0>0$，对于任何自然数 n，存在 $\{\widetilde{E}_n\}$，$\{\widetilde{F}_n\}\subset\mathscr{F}$，使得

$$\mu(\widetilde{E}_n)\vee\mu(\widetilde{F}_n)<\frac{1}{n}.$$

但是

$$\mu(\widetilde{E}_n\cup\widetilde{F}_n)\not<\varepsilon_0.$$

这样

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{F}_n)=0.$$

再由 μ 的上自连续性，我们有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n\cup\widetilde{F}_n)=0.$$

故存在 $n_0\geqslant 1$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}_{n_0}\cup\widetilde{F}_{n_0})<\varepsilon_0.$$

这与假设相矛盾！这说明 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质.

定义 7.2.3 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度 μ 称为具有 (SA) 性质（分别地，具有 (SB) 性质），如果对于任何 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$，存在 $\{\widetilde{B}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_k}\}$ 使得

$\mu(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_k})=0$，（分别地，$\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_k})^c)=\mu(\widetilde{A})$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$）.

命题 7.2.4 设 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质，如果 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，则存在实数列 $\delta_n>0$ 且 $\delta_n\searrow 0$ 及 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$\mu(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i})<\delta_k,\forall\, k\geqslant 1.$$

进一步地，μ 具有 (SA) 性质.

证明 由 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质，对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1\in(0,\varepsilon)$ 使得

$$\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta_1\Rightarrow\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\varepsilon.$$

对于 $\delta_1>0$，由 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，存在 n_1 使得

$$\mu(\widetilde{E}_{n_1})<\delta_1.$$

从而

$$\mu(\widetilde{E}_{n_1}\cup\widetilde{F})<\varepsilon.$$

再由 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质，存在 $\delta_2\in\left(0,\delta_1\wedge\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 使得

$$\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta_2\Rightarrow\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\delta_1.$$

对于 $\delta_2>0$，存在 $n_2>n_1$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}_{n_2})<\delta_2.$$

从而

$$\mu(\widetilde{E}_{n_2} \cup \widetilde{F}) < \delta_1.$$

这样

$$\mu(\widetilde{E}_{n_1} \cup \widetilde{E}_{n_2} \cup \widetilde{F}) < \varepsilon.$$

对于 $\delta_2 > 0$，又存在 $\delta_3 \in \left(0, \delta_2 \wedge \frac{\varepsilon}{2^2}\right)$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}) \vee \mu(\widetilde{F}) < \delta_3 \to \mu(\widetilde{E} \cup \widetilde{F}) < \delta_2.$$

对于 $\delta_3 > 0$，由 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n) = 0$，存在 $n_3 > n_2$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}_{n_3}) < \delta_3.$$

从而

$$\mu(\widetilde{E}_{n_3} \cup \widetilde{F}) < \delta_2 \quad \text{及} \quad \mu(\widetilde{E}_{n_3} \cup \widetilde{E}_2 \cup \widetilde{F}) < \delta_1$$

和

$$\mu(\widetilde{E}_{n_1} \cup \widetilde{E}_{n_2} \cup \widetilde{E}_{n_3} \cup \widetilde{F}) < \varepsilon.$$

一般地，我们能够得到 $n_{k+1} > n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1$ 和 $\delta_k < \delta_{k-1} \wedge \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$ 使得

$$\mu\left(\bigcup_{i=k}^{r+1}\widetilde{E}_{n_i}\right) < \delta_{k-1}, \ (k = 1,2,3,\cdots,r+1, r \geqslant 1).$$

令 $\widetilde{B}_k = \bigcup\limits_{i=k}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}$ 和 $\widetilde{E} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{B}_k$，则 $\widetilde{B}_k \searrow \widetilde{E}$ 和

$$\mu(\widetilde{B}_k) = \mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}\right) \leqslant \delta_{k-1}, \ (k \geqslant 1).$$

因此

$$\mu(\widetilde{E}) = 0.$$

即 μ 具有(SA)性质.

命题 7.2.5 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，如果 μ 是 autoc. $\downarrow$，则 μ 具有(SA)性质.

证明 设 μ 是 autoc. $\downarrow$，和 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n) = 0$，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 n_1 使得 $\mu(\widetilde{E}_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$，对于 $\widetilde{E}_{n_1}$，由 μ 是 autoc. $\downarrow$，存在

$n_2 > n_1$ 使得 $\mu(\widetilde{E}_{n_1} \cup \widetilde{E}_{n_2}) < \mu(\widetilde{E}_{n_1}) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{3}{4}\varepsilon$，如此等等，最后我们得到序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}\Big) < \varepsilon.$$

这样，我们得到 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i(1)}\}$ 使得

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(1)}\Big) < 1.$$

注意到 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{i\to\infty}\mu(\widetilde{E}_{n_i(1)}) = 0$，故又存在 $\{\widetilde{E}_{n_i(1)}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i(2)}\}$ 使得

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(2)}\Big) < \frac{1}{2},$$

一般地，存在 $\{\widetilde{E}_{n_i(j-1)}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i(j)}\}$ 使得

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(j)}\Big) < \frac{1}{j}, \qquad j = 1,2,\cdots,$$

取 $n_i = n_i(i)$，则 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 是 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列且满足

$$0 \leqslant \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(j)}\Big) < \frac{1}{j}, \qquad j = 1,2,\cdots,$$

故 μ 具有 (SA) 性质.

定理 7.2.1 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F}) \in A^*$ 则 μ 是 autoc. ↓ 充分必要条件是 μ 是 0-add. 和具有 (SA) 性质.

证明 必要性，由命题 7.2.1 和推论 7.2.1 立知. 下面我们证明充分性. 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，$\{\widetilde{E}_n\} \subset \mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n) = 0$. 则由命题 2.4.1 知，存在 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A} \cup \widetilde{E}_n) = (\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A} \cup \widetilde{E}_{n_i}).$$

对于子列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 应用 μ 的 (SA) 性质，我们可以找到 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big) = 0.$$

因此，由命题 7.1.4 和 μ 的零可加性，

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n) &= (\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_i}) \\
&= (\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{i\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_i}) \\
&\leqslant \mu\Big(\widetilde{A}\cup\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)\Big). \\
&= \mu(\widetilde{A}).
\end{aligned}
$$

从而

$$
(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n) = \mu(\widetilde{A}).
$$

命题 7.2.6 设 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的模糊值模糊测度,如果 μ 是 autoc. $\uparrow$,则 μ 具有(SB)性质.

证明 设 μ 是 autoc. $\uparrow$ 和 $(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$,则对于任意给定 $\varepsilon>0$,存在 n_1 使得

$$
\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_1}^c)\geqslant\mu(\widetilde{A})-\frac{\varepsilon}{2}.
$$

对于 $\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_1}^c$,由 μ 是 autoc. $\uparrow$,存在 $n_2>n_1$ 使得

$$
\begin{aligned}
\mu(\widetilde{A}\cap(\widetilde{E}_{n_1}\cup\widetilde{E}_{n_2})^c) &= \mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_1}^c)\cap\widetilde{E}_{n_2}^c) \\
&> \mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_1}^c)-\frac{\varepsilon}{4} \\
&> \mu(\widetilde{A})-\frac{3}{4}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

如此等等,最后我们得到 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$
\mu\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}\Big)^c\Big)>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon.
$$

进一步地,我们得到 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i(1)}\}$ 使得

$$
\mu\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(1)}\Big)^c\Big)>\mu(\widetilde{A})-1.
$$

注意到 $(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_{n_i(1)})=0$,故又存在 $\{\widetilde{E}_{n_i(1)}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i(2)}\}$ 使得

$$
\mu\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(2)}\Big)^c\Big)>\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{2}.
$$

一般地,存在 $\{\widetilde{E}_{n_i(j-1)}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i(j)}\}$ 使得

$$\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(j)})^c)>\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{j},\qquad j=1,2,\cdots,$$

再取 $n_i=n_i(i)$，则 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 是 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列且满足

$$\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(j)},\qquad j=1,2,\cdots,$$

结果

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{A})&\geqslant\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i})^c)\\&\geqslant\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i(j)})^c)\geqslant\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{j}.\end{aligned}$$

对于一切 $j=1,2,\cdots$ 成立. 于是

$$\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i})^c)=\mu(\widetilde{A}).$$

定理 7.2.2 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F})\in A^*$，则 μ 是 autoc. ↑ 充分必要条件是 μ 是 0-sub. 和具有 (SB) 性质.

证明 必要性，由命题 7.2.1 和 7.2.6 得到. 下面我们证明充分性. 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，则由命题 2.4.1 知，存在 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_i}^c).$$

对子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 应用定理条件，我们能够找到 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}})^c)=\mu(\widetilde{A}),$$

因此，由命题 7.1.4，

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)&=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_i}^c)\\&=(\widetilde{\rho})\varliminf_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_i}^c)\\&\geqslant\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}})^c)\\&=\mu(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)=\mu(\widetilde{A}).$$

定理 7.2.3 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F})\in A^*$，如果 μ 是 0-sub. 和具有 (SA) 性质，则 μ 是 autoc. $\uparrow$.

证明 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，则由命题 2.4.1 知，存在 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_i}^c).$$

对于 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 应用 (SA) 性质，我们能够找到 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)=0.$$

再由 μ 的零可减性及命题 7.1.4，

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)&=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_i}^c)\\&=(\widetilde{\rho})\varliminf_{k\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_{n_{i_k}}^c)\\&\geqslant\mu\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)^c\Big)\\&=\mu(\widetilde{A}),\end{aligned}$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}_n^c)=\mu(\widetilde{A}).$$

结合命题 7.1.5 和定理 7.2.1 和 7.2.3 得到

定理 7.2.4 设 μ 是 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}\cap\mathscr{P}(X)$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$，如果 μ 是 autoc. $\downarrow$，则 μ 是 autoc. $\uparrow$.

进一步地，我们有

定理 7.2.5 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度、$\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$，则下列命题等价：

(1) μ 是 autoc. $\downarrow$；

(2) μ 是 autoc. $\uparrow$；

(3) μ 是 autoc..

证明 由定理 7.2.4 知,我们只要证明当 μ 是 autoc. ↑ 时,μ 是 autoc. ↓. 事实上,对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$, $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}_0$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$. 由命题 2.4.1 知,存在 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_i}).$$

再由命题 7.2.5,存在 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu\Big(\big(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_{i_k}}\big)\cap\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)^c\Big)=\mu\big(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_{i_k}}\big),\ k=1,2,\cdots.$$

因此,注意到

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\Big(\widetilde{E}_{n_{i_k}}\cap\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)^c\Big)=\varnothing.$$

及命题 7.1.5,

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{A})&\leqslant(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_i})=(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_{i_k}})\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu\Big(\big(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_{i_k}}\big)\cap\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)^c\Big)\\&=(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\mu\Big(\big(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_{n_{i_k}}\big)\cap\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)^c\Big)\\&\leqslant\mu\Big(\widetilde{A}\cup\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\Big(\widetilde{E}_{n_{i_k}}\cap\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_{i_k}}\Big)^c\Big)\Big)\\&=\mu(\widetilde{A}\cup\varnothing)=\mu(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{E}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

即 μ 是 autoc. ↓.

推论 7.2.1 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度,$\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$,则 μ 是 autoc. 充分必要条件是它是 0-add. 和具有(SA)性.

命题 7.2.7 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度,$\mu(\mathscr{F})\in A^*$,

则 μ 是 autoc. $\downarrow$ 当且仅当 μ 是 0-add. 和具有性质：对于任何 $\{\widetilde{E}_n\}\in\left\{\{\widetilde{E}_n\};\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_n)\neq\widetilde{\infty},\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}\right\}$，存在 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}\right)=0.$$

证明 由命题 2.4.1 知，必要性是显然的. 我们只要注意到，如果 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=0$，一定存在 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_{n_i})\neq\widetilde{\infty}$，即可证明充分性.

类似地，我们有

命题 7.2.8 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F})\in A^*$，则 μ 是 autoc. $\uparrow$ 当且仅当 μ 是 0-sub. 和具有性质：对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\widetilde{E}_n\}\in\left\{\{\widetilde{E}_n\};\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\widetilde{E}_n)\neq\widetilde{\infty},\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}\right\}$ 存在 $\{\widetilde{E}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{E}_{n_i}\}$ 使得

$$\mu\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}\widetilde{E}_{n_i}\right)^c\right)=\mu(\widetilde{A}).$$

定理 7.2.6 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的自连续模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F})\in A^*$ 则

(1) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$，

如果
$$(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n)=\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{A}_n),$$
则
$$(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n\cup\widetilde{B}_n)=(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n);$$

(2) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$，

如果
$$(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n)=\mu(\underline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{A}_n),$$
则
$$(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n\cap\widetilde{B}_n^c)=(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n);$$

(3) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$，

如果 $$(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n),$$

则 $$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n\triangle\widetilde{B}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

证明

（1）设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$，由命题 2.4.1 及命题 7.2.5，存在 $\{\widetilde{B}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_k}\}$ 及 $\{\widetilde{B}_{n_k}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_{k_s}}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n\cup\widetilde{B}_n)=(\widetilde{\rho})\ \lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{A}_{n_k}\cup\widetilde{B}_{n_k})$$

和

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{k_s}}\Big)=0.$$

从而，由 μ 的零可加性及命题 7.1.4 和 $(\widetilde{\rho})\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n)=\mu(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\widetilde{A}_n)$，我们有

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n\cup\widetilde{B}_n)=(\widetilde{\rho})\ \lim_{s\to\infty}\mu\Big(\widetilde{A}_{n_{k_s}}\cup\widetilde{B}_{n_{k_s}}\Big)\\
&\leqslant\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=j}^{\infty}\Big(\widetilde{A}_{n_{k_s}}\cup\widetilde{B}_{n_{k_s}}\Big)\Big)\\
&=\mu\Big(\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=j}^{\infty}\widetilde{A}_{n_{k_s}}\Big)\cup\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{k_s}}\Big)\Big)\\
&=\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=j}^{\infty}\widetilde{A}_{n_{k_s}}\Big)\leqslant\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=i}^{\infty}\widetilde{A}_n\Big)\\
&=(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n).
\end{aligned}$$

这样，我们得到

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n\cup\widetilde{B}_n)=(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n).$$

（2）设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$，则由命题 2.4.1 及推论 7.2.1 知存在 $\{\widetilde{B}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_k}\}$ 及 $\{\widetilde{B}_{n_k}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_{k_s}}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}_n\cap\widetilde{B}_n^c)=(\widetilde{\rho})\ \lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{A}_{n_k}\cap\widetilde{B}_{n_k}^c)$$

和

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{k_s}}\Big)=0.$$

从而，由 μ 的零可减性及命题 7.1.4 和 $(\widetilde{\rho})\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{A}_n)$，我们有

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n\cap\widetilde{B}_n^c)&=(\widetilde{\rho})\ \lim_{s\to\infty}\mu\Big(\widetilde{A}_{n_{k_s}}\cap\widetilde{B}_{n_{k_s}}^c\Big)\\&\geqslant\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{s=j}^{\infty}\Big(\widetilde{A}_{n_{k_s}}\cap\widetilde{B}_{n_{k_s}}^c\Big)\Big)\\&=\mu\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{s=j}^{\infty}\widetilde{A}_{n_{k_s}}\Big)\cap\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{k_s}}\Big)^c\Big)\\&=\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{s=j}^{\infty}\widetilde{A}_{n_{k_s}}\Big)\\&\geqslant\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=i}^{\infty}\widetilde{A}_n\Big)=(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).\end{aligned}$$

故

$$(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n\cap\widetilde{B}_n^c)=(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

(3) 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，且 $(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$

及

$$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{A}_n)=\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{A}_n),$$

则由命题 7.1.4

$$\begin{aligned}\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{A}_n)&\leqslant(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\leqslant\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{A}_n),\end{aligned}$$

我们有

$$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)$$

及

$$\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n),$$

因此，由(1)和(2)知

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n) &= (\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^c) \\
&\leqslant (\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \triangle \widetilde{B}_n) \leqslant (\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \triangle \widetilde{B}_n) \\
&\leqslant (\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \cup \widetilde{B}_n) \\
&= (\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n) \\
&= (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).
\end{aligned}
$$

故

$$
(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \triangle \widetilde{B}_n) = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).
$$

推论 7.2.2 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F}_0) \in A^*$，则下列命题等价：

(1) μ 是 autoc.；

(2) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{B}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n) = 0$，

如果
$$
\mu(\varlimsup_{n\to\infty}\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n),
$$
则
$$
(\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \cup \widetilde{B}_n) = (\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n);
$$

(3) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{B}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n) = 0$，

如果
$$
\mu(\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n),
$$
则
$$
(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^c) = (\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n);
$$

(4) 对于任何 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{B}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n) = 0$，

如果
$$
\mu(\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{A}_n) = \mu(\varlimsup_{n\to\infty}\widetilde{A}_n),
$$
则
$$
(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n \triangle \widetilde{B}_n) = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).
$$

证明 由定理 7.2.7 知，我们只要证明(2)⇒(1)，(3)⇒(1)和(4)⇒(1). 事实上，我们取 $\widetilde{A} = \widetilde{A}_n$，$n=1,2,\cdots$，再由定理 7.2.5 及定理 2.4.3，我们即可得到(2)⇒(1)和(3)⇒(1). 下面我们证明(4)⇒(1)，取 $\widetilde{A} = \widetilde{A}_n$，$n=1,2,\cdots$ 由 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n) = 0$ 知，

$$0 \leqslant (\tilde{\rho}) \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(\tilde{A}^c \cap \tilde{B}_n) \leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{B}_n) = 0.$$

这样，

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A}_n \cup \tilde{B}_n) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A} \triangle (\tilde{B}_n \cap \tilde{A}^c))$$
$$= \mu(\tilde{A}).$$

再由定理 7.2.5，μ 是 autoc..

定理 7.2.7 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F}) \in A^*$，如果 μ 是 autoc.，则

(1) 对于任何 $\tilde{A} \in \mathscr{F}$，$\{\tilde{A}_n\}$，$\{\tilde{B}_n\} \subset \mathscr{F}$，

且 $$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A}_n) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{B}_n) = 0,$$

则 $$(\tilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\tilde{A} \cup \tilde{A}_m \cup \tilde{B}_n) = \mu(\tilde{A});$$

(2) 对于任何 $\tilde{A} \in \mathscr{F}$，$\{\tilde{A}_n\}$，$\{\tilde{B}_n\} \subset \mathscr{F}$，

且 $$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A}_n) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{B}_n) = 0,$$

则 $$(\tilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\tilde{A} \cap (\tilde{A}_m \cup \tilde{B}_n)^c) = \mu(\tilde{A});$$

(3) 对于任何 $\tilde{A} \in \mathscr{F}$，$\{\tilde{A}_n\}$，$\{\tilde{B}_n\} \subset \mathscr{F}$，

且 $$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A}_n) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{B}_n) = 0,$$

则 $$(\tilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\tilde{A} \triangle (\tilde{A}_m \cup \tilde{B}_n)) = \mu(\tilde{A}).$$

证明

(1) 假设结论不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，及 $\tilde{A} \in \mathscr{F}$，及 $\{\tilde{A}_{m_k}\}$，$\{\tilde{B}_{n_k}\} \subset \mathscr{F}$，使得

$$(\tilde{\rho}) \lim_{k\to\infty} \mu(\tilde{A}_{m_k}) = (\tilde{\rho}) \lim_{k\to\infty} \mu(\tilde{B}_{n_k}) = 0,$$

并且

$$\tilde{\rho}(\mu(\tilde{A} \cup \tilde{A}_{m_k} \cup \tilde{B}_{n_k}), \mu(\tilde{A})) \not< \varepsilon_0, k = 1, 2, \cdots.$$

因此，存在 $\lambda_0 \in (0,1]$ 使得

$$\sup_{\lambda_0 \leqslant \eta \leqslant 1} [\,| \mu_\eta^-(\tilde{A} \cup \tilde{A}_{m_k} \cup \tilde{B}_{n_k}) - \mu_\eta^-(\tilde{A}) |$$

$$\vee \left|\mu_\eta^+(\widetilde{A} \cup \widetilde{A}_{m_k} \cup \widetilde{B}_{n_k}) - \mu_\eta^+(\widetilde{A})\right| \Big] > \varepsilon_0$$

再由确界定义知，一定存在 $\eta_0 \in [\lambda_0, 1] \subset (0,1]$ 使得

$$\left|\mu_{\eta_0}^-(\widetilde{A} \cup \widetilde{A}_{m_k} \cup \widetilde{B}_{n_k}) - \mu_{\eta_0}^-(\widetilde{A})\right| \vee \left|\mu_{\eta_0}^+(\widetilde{A} \cup \widetilde{A}_{m_k} \cup \widetilde{B}_{n_k}) - \mu_{\eta_0}^-(\widetilde{A})\right|$$

$> \varepsilon_0$.

我们不妨假定

$$\left|\mu_{\eta_0}^+(\widetilde{A} \cup \widetilde{A}_{m_k} \cup \widetilde{B}_{n_k}) - \mu_{\eta_0}^-(\widetilde{A})\right| > \varepsilon_0.$$

即
$$\mu_{\eta_0}^+(\widetilde{A}) + \varepsilon_0 < \mu_{\eta_0}^+(\widetilde{A} \cup \widetilde{A}_{m_k} \cup \widetilde{B}_{n_k}).$$

因此，由 μ 的零可加性及命题 7.1.4 知

$$\begin{aligned}
\mu_{\eta_0}^+(\widetilde{A}) + \varepsilon_0 &< \overline{\lim_{s\to\infty}} \mu_{\eta_0}^+(\widetilde{A} \cup \widetilde{A}_{m_{k_s}} \cup \widetilde{B}_{n_{k_s}}) \\
&\leqslant \mu_{\eta_0}^+\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{s=j}^{\infty} (\widetilde{A} \cup \widetilde{A}_{m_{k_s}} \cup \widetilde{B}_{n_{k_s}})\Big) \\
&= \mu_{\eta_0}^+\Big(\widetilde{A} \cup \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{s=j}^{\infty} \widetilde{A}_{m_{k_s}}\Big) \cup \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{s=j}^{\infty} \widetilde{B}_{n_{k_s}}\Big)\Big) \\
&= \mu_{\eta_0}^+(\widetilde{A}).
\end{aligned}$$

这与事实相矛盾！从而命题得证.

(2) 类似(1)可证.

(3) 对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，$\{\widetilde{A}_n\}$，$\{\widetilde{B}_n\} \subset \mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n) = 0$，由(1)和(2)得到

$$\begin{aligned}
\mu(\widetilde{A}) &= (\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\widetilde{A} \cap (\widetilde{A}_m \cup \widetilde{B}_n)^c) \\
&\leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\widetilde{A} \triangle (\widetilde{A}_m \cup \widetilde{B}_n)) \\
&\leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\widetilde{A} \triangle (\widetilde{A}_m \cup \widetilde{B}_n)) \\
&\leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\widetilde{A} \cup (\widetilde{A}_m \cup \widetilde{B}_n)) \\
&= \mu(\widetilde{A}),
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\triangle(\widetilde{A}_m\cup\widetilde{B}_n))=\mu(\widetilde{A}).$$

推论 7.2.3 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$，则下列命题等价：

(1) μ 是 autoc.；

(2) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{A}_n\}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0,$$

则
$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{A}_m\cup\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A});$$

(3) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{A}_n\}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0,$$

则
$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap(\widetilde{A}_m\cup\widetilde{B}_n)^c)=\mu(\widetilde{A});$$

(4) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{A}_n\}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0,$$

则
$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\triangle(\widetilde{A}_m\cup\widetilde{B}_n))=\mu(\widetilde{A}).$$

证明 显然.

定义 7.2.4 称模糊值模糊集函数 $\mu:\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}_+^*(R)$ 是一致上自连续的，记为 u. autoc. ↓（分别地，一致下自连续的，记为 u. autoc. ↑），如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，且 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{C}$（分别地，$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c\in\mathscr{C}$），$\mu(\widetilde{B})<\delta$ 有

$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon$，（分别地，$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon$），$\mu$ 叫做一致自连续的，记为 u. autoc.，如果它是一致上自连续的又是一致下自连续的.

命题 7.2.9

(1) 如果 μ 是 u. autoc. ↓，则 μ 是 autoc. ↓；

(2) 如果 μ 是 u. autoc. ↑，则 μ 是 autoc. ↑.

证明

(1) 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{C}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$. 由于 μ 是 u. autoc. ↓，所以，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{C}$ 且 $\mu(\widetilde{B})<\delta$ 及 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，有

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon.$$

对此 $\delta>0$，由于 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=0$，于是存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $\mu(\widetilde{B}_n)<\delta$. 因此，

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}_n),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon.$$

即

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

(2) 类似(1)可证.

命题 7.2.10 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，则下列命题等价：

(1) μ 是 u. autoc. ↓；

(2) μ 是 u. autoc. ↑；

(3) μ 是 u. autoc.；

(4) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$，$\widetilde{B}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\widetilde{B})<\delta$，有

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\triangle\widetilde{B}),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon.$$

证明

(1)⇒(2) 因为 $A\in\mathscr{F}_0$，所以 $\widetilde{A}=(\widetilde{A}\setminus\widetilde{B})\cup(\widetilde{B}\cap\widetilde{A})$ 及 $\mu(\widetilde{B}\cap\widetilde{A})\leqslant\mu(\widetilde{B})<\delta$，所以，由 μ 是 u. autoc. ↓ 知

$$\begin{aligned}&\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c),\mu(\widetilde{A}))\\&=\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c),\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}))<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 μ 是 u. autoc. ↑.

(2)⇒(4) 因为 $\widetilde{A}\triangle\widetilde{B}=(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})^c$，及 $\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})\leqslant$

$\mu(\widetilde{B})\leqslant\delta$，所以，由 μ 是 u. autoc. ↑ 知

$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\triangle\widetilde{B}),\mu(\widetilde{A}))=\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})^c),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon,$

(4)⇒(3)因为 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c=\widetilde{A}\triangle(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})$ 及 $\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})\leqslant\mu(\widetilde{B})<\delta$，所以，由(4)知

$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c),\mu(\widetilde{A}))=\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\triangle(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon,$

即 μ 是 u. autoc. ↑，又因为 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=\widetilde{A}\triangle(\widetilde{B}\cap\widetilde{A}^c)$ 及 $\mu(\widetilde{B}\cap\widetilde{A}^c)\leqslant\mu(\widetilde{B})<\delta$，所以，由(4)知

$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}),\mu(\widetilde{A}))=\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\triangle(\widetilde{B}\cap\widetilde{A}^c)),\mu(\widetilde{A}))<\varepsilon.$

即 μ 是 u. autoc. ↓，故 μ 是 u. autoc.

(3)→(1)显然.

定义 7.2.5 设 μ 是从 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}_+^*(R)$ 上的模糊值模糊集函数，称 μ 是 F-可加的，如果对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}\in\mathscr{C}$ 有 $\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A})\vee\mu(\widetilde{B})$；称 μ 是次可减的，如果对于任何 $\widetilde{A}$、$\widetilde{B}\in\mathscr{C}$，$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c\in\mathscr{C}$，有 $\mu(\widetilde{B})+\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\geqslant\mu(\widetilde{A})$.

命题 7.2.11 设 μ 是 $\mathscr{C}$ 上模糊值模糊集函数，则

(1) 如果 μ 是 F-可加的，则 μ 是次可加的；

(2) 如要 μ 是次可加的，则 μ 是 u. autoc. ↓；

(3) 如果 μ 是次可减的，则 μ 是 u. autoc. ↑.

证明 显然.

7.3 模糊值模糊测度的伪自连续

定义 7.3.1 设 μ 是从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{F}_+^*(R)$ 上的模糊值模糊集函数，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，称 μ 是关于 $\widetilde{A}$ 伪上自连续的，记为 p. autoc. ↓ /$\widetilde{A}$(分别地，关于 $\widetilde{A}$ 伪下自连续的，记为 p. autoc. ↑ /$\widetilde{A}$)，如果对于任何 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\widetilde{E}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}=\{\widetilde{A}\cap\widetilde{D};\widetilde{D}\in\mathscr{F}\}$ 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\tilde{A}\cap\tilde{B}_n^c)\cup\tilde{E})$$

$$=\mu(\tilde{E})\left(\text{分别地},(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{B}_n\cap\tilde{E})=\mu(\tilde{E})\right);$$

称 μ 是关于 $\tilde{A}$ 伪自连续的，记为 p. autoc. $/\tilde{A}$，如果它是关于 $\tilde{A}$ 伪上自连续的和关于 $\tilde{A}$ 伪下自连续的；称 μ 是伪上自连续的（分别地，伪下自连续的，伪自连续的），记为 p. autoc. $\downarrow$（分别地，p. autoc. $\uparrow$，p. autoc.），如果对于任何 $\tilde{A}\in\mathscr{F}$，$\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$，$\mu$ 都是关于 $\tilde{A}$ 伪上自连续的（分别地，关于 $\tilde{A}$ 伪下自连续的，关于 $\tilde{A}$ 伪自连续的）.

命题 7.3.1

(1) 如果 μ 是 p. autoc. $\downarrow/\tilde{A}$，则 μ 是 p. 0-add. $/\tilde{A}$；

(2) 如果 μ 是 p. autoc. $\uparrow/\tilde{A}$，则 μ 是 p. 0-sub. $/\tilde{A}$.

证明

(1) 设 $\tilde{A}\in\mathscr{F}$，$\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$，对于任何 $\tilde{B}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B})=\mu(\tilde{A})$，我们取 $\tilde{B}_n=\tilde{B}$，$n=1,2,\cdots$，从而 $\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n)=\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B})=\mu(\tilde{A})$，$n=1,2,\cdots$，这样

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n)=\mu(\tilde{A}).$$

由 μ 是 p. autoc. $\downarrow/\tilde{A}$，则对于任何 $\tilde{E}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}$，

$$\mu((\tilde{A}\cap\tilde{B}^c)\cup\tilde{E})=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\tilde{A}\cap\tilde{B}_n^c)\cup\tilde{E})=\mu(\tilde{E}).$$

即 μ 是 p. 0-add. $/\tilde{A}$.

(2) 类似(1)可证.

定理 7.3.1 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊集函数且 $\mu(X)\neq\tilde{\infty}$，如果 μ 是 X 下连续的且 p. autoc. $\downarrow$（分别地，p. autoc. $\uparrow$），则 μ 是上连续的（分别地，下连续的）.

证明

(1) 设 $\{\tilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}_0$ 且 $\tilde{A}_n\searrow$，令 $\tilde{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n$，则 $\tilde{A}\cup\tilde{A}_n^c\nearrow X$，这样

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cup\widetilde{A}_n^c)\cap X)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{A}_n^c)=\mu(X)\neq\widetilde{\infty}.$$

再由 μ 是 p. autoc. $\downarrow$，则

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cup\widetilde{A}_n)\cap(\widetilde{A}\cup\widetilde{A}^c))\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup(\widetilde{A}_n\cap\widetilde{A}^c))\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cup(\widetilde{A}_n^c\cup\widetilde{A})^c)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((X\cap(A\cup\widetilde{A}_n^c)^c)\cup\widetilde{A})\\&=\mu(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

(2) 设$\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{F}_0$ 且 $\widetilde{A}_n\nearrow$，令 $\widetilde{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n$，则 $\widetilde{A}_n\cup\widetilde{A}^c\nearrow X$，这样

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}_n\cup\widetilde{A}^c)\cap X)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n\cup\widetilde{A}^c)\\&=\mu(X)\neq\widetilde{\infty},\end{aligned}$$

再由 μ 是 p. autoc. $\uparrow$，则

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}_n\cup\widetilde{A}^c)\cap\widetilde{A})\\&=\rho\mu(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

定义 7.3.2 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊集函数，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\widetilde{E},\widetilde{F}\subset\widetilde{A}$ 且 $\mu(\widetilde{E})\wedge\mu(\widetilde{F})>\mu(\widetilde{A})-\delta$ 时，有 $\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{F})>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon$，则称 μ 关于 $\widetilde{A}$ 具有$(p.p.g.p)$性质. 如果对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\mu$ 关于 $\widetilde{A}$ 都具有$(p.p.g.p)$性质，则称 μ 具有$(p.p.g.p)$性质.

命题 7.3.2 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F})=\{\mu(\widetilde{A});\widetilde{A}\in\mathscr{F}\}\in A^*$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果 μ 是 p. autoc. $\uparrow/\widetilde{A}$，则 μ 关于 $\widetilde{A}$ 具有$(p.p.g.p)$性质.

证明 如果 μ 关于 $\widetilde{A}$ 不具有$(p.p.g.p)$性质，则存在 $\varepsilon_0>0$，

对于任何自然数 n，存在$\{\widetilde{E}_n\}\subset\widetilde{A}$，$\{\widetilde{F}_n\}\subset\widetilde{A}$，使得

$$\mu(\widetilde{E}_n)\wedge\mu(\widetilde{F}_n)>\mu(\widetilde{A})-\delta\frac{1}{n},$$

但是

$$\mu(\widetilde{E}_n\cap\widetilde{F}_n)\not>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon_0.$$

这样

$$(\widetilde{p})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n)=(\widetilde{p})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{F}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

再由 μ 关于 $\widetilde{A}$ 是伪下自连续性，我们有

$$(\widetilde{p})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n\cap\widetilde{F}_n)=\mu(\widetilde{A}).$$

故存在 $n_0\geqslant 1$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}_{n_0}\cap\widetilde{F}_{n_0})>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon_0.$$

这与假设相矛盾！这说明 μ 关于 $\widetilde{A}$ 具有$(p.p.g.p)$性质.

定义 7.3.3 称 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊集函数 μ 具有(psa)性质（分别地，(psb)性质），如果对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，和任何$\{\widetilde{B}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$，$(\widetilde{p})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，存在$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得对于任何 $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$，

$$\mu\Big(\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\Big)'\Big)\cup\widetilde{C}\Big)=\mu(\widetilde{C}),$$

$$\Big(\text{分别地}，\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\Big)=\mu(\widetilde{A})\Big).$$

命题 7.3.3 设 μ 具有$(p.p.g.p)$性质，如果 $B_n\subset\widetilde{A}$（$\widetilde{A}\subset\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$）且$(\widetilde{p})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，则存在实数列 $\delta_n>0$ 且 $\delta_n\searrow 0$ 及$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得

$$\mu\Big(\bigcap_{i=k+1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\Big)>\mu(\widetilde{A})-\delta_k,\ (k\geqslant 1).$$

进一步地，μ 具有(psb)性质.

证明 由于 μ 具有$(p.p.g.p)$性质，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1\in(0,\varepsilon)$使得 $\widetilde{E},\widetilde{F}\subset\widetilde{A}$，且

$$\mu(\widetilde{E}) \wedge \mu(\widetilde{F}) > \mu(\widetilde{A}) - \delta_1 \Rightarrow \mu(\widetilde{E} \cap \widetilde{F}) > \mu(\widetilde{A}) - \varepsilon.$$

对于 $\delta_1>0$，由于 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，存在 n_1 使得

$$\mu(\widetilde{B}_{n_1}) > \mu(\widetilde{A}) - \delta_1,$$

从而

$$\mu\left(\widetilde{B}_{n_1} \cap \widetilde{F}\right) > \mu(\widetilde{A}) - \varepsilon.$$

再由 μ 具有 $(p.\ p.\ g.\ p)$ 性质，存在 $\delta_2\in\left(0,\delta_1\wedge\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 使得 $\widetilde{E},\widetilde{F}\subseteq\widetilde{A}$ 且

$$\mu(\widetilde{E}) \wedge \mu(\widetilde{F}) > \mu(\widetilde{A}) - \delta_2 \Rightarrow \mu(\widetilde{E} \cap \widetilde{F}) > \mu(\widetilde{A}) - \delta_1,$$

对于上述 $\delta_2>0$，存在 $n_2>n_1$ 使得

$$\mu(\widetilde{B}_{n_2}) > \mu(\widetilde{A}) - \delta_2,$$

从而

$$\mu\left(\widetilde{B}_{n_2} \cap \widetilde{F}\right) > \mu(\widetilde{A}) - \delta_1,$$

这样

$$\mu\left(\widetilde{B}_{n_1} \cap \widetilde{B}_{n_2} \cap \widetilde{F}\right) > \mu(\widetilde{A}) - \varepsilon.$$

一般地，我们能够得到 $n_{k+1}>n_k>\cdots>n_1\geqslant 1$ 和 $\delta_k<\delta_{k-1}\wedge\dfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}$，使得

$$\mu\left(\bigcap_{i=k}^{r+1}\widetilde{B}_{n_i}\right) > \mu(\widetilde{A}) - \delta_{k-1},\ (k = 1,2,\cdots,r+1,r \geqslant 1).$$

令 $\widetilde{E}_k=\bigcap\limits_{i=k}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}$ 和 $\widetilde{E}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=k}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_k$，则 $\widetilde{E}_k\nearrow\widetilde{E}$ 及

$$\mu(\widetilde{E}_k) = \mu\left(\bigcap_{i=k}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\right) \geqslant \mu(\widetilde{A}) - \delta_{k-1},\ (k \geqslant 1).$$

因此，

$$\mu(\widetilde{E}) = \mu(\widetilde{A}),$$

即 μ 具有 (psh) 性质.

命题 7.3.4 设 μ 是 $\mathscr{S}$ 上的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果 μ 是 p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$（分别地，p. autoc. $\uparrow/\widetilde{A}$），则 μ

具有(psa)性质(分别地,μ具有(psb)性质).

证明 设$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,及$\{\widetilde{B}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$,则由$\mu$是p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$,对于任何$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$,我们有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C})=\mu(\widetilde{C}).$$

这样,对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在n_1使得

$$\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_1}^c)\cup\widetilde{C}),\mu(\widetilde{C}))<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_1}^c)\cup\widetilde{C})<\mu(\widetilde{C})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_1}^c)\cup\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$应用$\mu$关于$\widetilde{A}$伪上自连续性,我们有

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}_{n_1}\cap\widetilde{B}_n)^c)\cup\widetilde{C})\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_1}^c)\cup\widetilde{C}))\\&=\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_1}^c)\cup\widetilde{C}).\end{aligned}$$

因此,存在$n_2>n_1$使得

$$\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}_{n_1}\cap\widetilde{B}_{n_2})^c)\cup\widetilde{C}),\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_1}^c)\cup\widetilde{C}))<\frac{\varepsilon}{2^2},$$

从而

$$\begin{aligned}\mu((\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}_{n_1}\cap\widetilde{B}_{n_2})^c)\cup\widetilde{C})&<\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_1}^c)\cup\widetilde{C})+\frac{\varepsilon}{2^2}\\&<\mu(\widetilde{C})+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}=\mu(\widetilde{C})+\frac{3\varepsilon}{2^2}.\end{aligned}$$

如此等等,最后得到序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得

$$\mu((\widetilde{A}\cap(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i})^c)\cup\widetilde{C})<\mu(\widetilde{C})+\varepsilon.$$

由此,我们得到$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i(1)}\}$使得

$$\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(1)}\right)^c\right)\cup\widetilde{C}\right)<\mu(\widetilde{C})+1.$$

注意到$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{i\to\infty}\mu\left(\widetilde{B}_{n_i(1)}\right)=\mu(\widetilde{A})$，故重复上述过程，存在$\{\widetilde{B}_{n_i(1)}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i(2)}\}$使得

$$\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(2)}\right)^c\right)\cup\widetilde{C}\right)<\mu(\widetilde{C})+\frac{1}{2},$$

一般地，存在$\{\widetilde{B}_{n_i(j-1)}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i(j)}\}$使得

$$\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(j)}\right)^c\right)\cup\widetilde{C}\right)<\mu(\widetilde{C})+\frac{1}{j},\ j=1,2,\cdots.$$

我们取$n_i=n_i(i)$，则$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$是$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列，且满足

$$\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\supset\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(j)},\ j=1,2,\cdots.$$

结果，

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{C})&\leqslant\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\right)^c\right)\cup\widetilde{C}\right)\\&\leqslant\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(j)}\right)^c\right)\cup\widetilde{C}\right)<\mu(\widetilde{C})+\frac{1}{j},\end{aligned}$$

对于$j=1,2,\cdots$成立. 于是

$$\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\right)^c\right)\cup\widetilde{C}\right)=\mu(\widetilde{C}).$$

即μ具有(PSA)性质.

下面我们证明另一结论. 设$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$及$\{\widetilde{B}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，则对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_1>0$使得

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{B}_{n_1}),\mu(\widetilde{A}))<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\mu(\widetilde{A})-\frac{\varepsilon}{2}<\mu(\widetilde{B}_{n_1}).$$

对于$\widetilde{B}_{n_1}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$应用$\mu$关于$\widetilde{A}$伪下自连续性，我们有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_{n_1}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{B}_{n_1}).$$

从而，存在 $n_2>n_1$ 使得

$$\widetilde{\rho}\left(\mu\left(\widetilde{B}_{n_1}\cap\widetilde{B}_{n_2}\right),\mu\left(\widetilde{B}_{n_1}\right)\right)<\frac{\varepsilon}{2^2},$$

即

$$\mu(\widetilde{B}_{n_1})-\frac{\varepsilon}{2^2}<\mu\left(\widetilde{B}_{n_1}\cap\widetilde{B}_{n_2}\right).$$

故

$$\begin{aligned}\mu\left(\widetilde{B}_{n_1}\cap\widetilde{B}_{n_2}\right)&>\mu(\widetilde{A})-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2^2}\\&=\mu(\widetilde{A})-\frac{3\varepsilon}{2^2}.\end{aligned}$$

如此等等，最后我们得到$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\right)>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon.$$

进一步地，我们得到$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i(1)}\}$使得

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(1)}\right)>\mu(\widetilde{A})-1.$$

注意到$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{i\to\infty}\mu(\widetilde{B}_{n_i(1)})=\mu(\widetilde{A})$，我们重复上述过程，我们又可以找到$\{\widetilde{B}_{n_i(1)}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i(2)}\}$使得

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(2)}\right)>\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{2}.$$

一般地，存在$\{\widetilde{B}_{n_i(j-1)}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i(j)}\}$使得

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(j)}\right)>\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{j},\ j=1,2,\cdots.$$

我们取 $n_i=n_i(i)$，则$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$是$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列且满足

$$\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\supset\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(j)}\quad j=1,2,\cdots.$$

结果

$$\mu(\widetilde{A})\geqslant\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\right)\geqslant\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i(j)}\right)>\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{j},$$

对于 $j=1,2,\cdots$成立. 于是

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_i}\Big)=\mu(\widetilde{A}).$$

定理 7.3.2 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$及 $\mu(\mathscr{F})\in A^*$,则 μ 是p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$ 当且仅当 μ 是p. 0-add. $/\widetilde{A}$ 和具有(psa)性质.

证明 必要性,由命题 7.3.1 和 7.3.4 即得. 下面我们证明充分性. 设$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$,$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$. 由命题 2.4.1,存在$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu\big((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}\big)=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu\big((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_i}^c)\cup\widetilde{C}\big).$$

对于子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$应用 μ 具有(psa)性质,我们可以找到$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_{i_k}}\}$使得

$$\mu\Big(\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)^c\Big)\cup\widetilde{C}\Big)=\mu(\widetilde{C}).$$

因此,由 μ 是p. 0-add. $/\widetilde{A}$ 及命题 7.1.4

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu\big((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}\big)&=(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu\big((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}^c)\cup\widetilde{C}\big)\\&\leqslant\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\big((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}^c)\cup\widetilde{C}\big)\Big)\\&=\mu\Big(\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{i_k}}\Big)^c\Big)\cup\widetilde{C}\Big)\\&\leqslant\mu\Big(\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)^c\Big)\cup\widetilde{C}\Big)\\&=\mu(\widetilde{C}).\end{aligned}$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu\big((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}\big)=\mu(\widetilde{C}),$$

即 μ 是p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$.

定理 7.3.3 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$及 $\mu(\mathscr{F})\in A^*$,则 μ 是p. autoc. $\uparrow/\widetilde{A}$ 当且仅当 μ 是p.

0-sub. $/\widetilde{A}$ 和具有(psb)性质.

证明 必要性,由命题 7.3.1 和 7.3.4 即得. 下面我们证明充分性. 设$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$, $\widetilde{\mathscr{C}}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$ 且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{A})=\mu(\widetilde{A})$. 由命题 2.4.1 知存在$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得

$$(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{C})=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu\left(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_{n_i}\right).$$

对上述$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$应用 μ 具有(psb)性质,我们能够找到$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_{i_k}}\}$使得

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\right)=\mu(\widetilde{A}).$$

因此,由 μ 是 p. 0-sub. $/\widetilde{A}$ 及命题 7.1.4

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_n)&=(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu\left(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu\left(\widetilde{C}\cap\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\right)\\&\geqslant\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\left(\widetilde{C}\cap\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\right)\right)\\&=\mu\left(\widetilde{C}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\right)\right)\\&=\mu(\widetilde{C}),\end{aligned}$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{C}),$$

即 μ 是 p. autoc. $\uparrow/\widetilde{A}$.

定理 7.3.4 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$及 $\mu(\mathscr{F})\in A^*$,如果 μ 是 p. 0-add. $/\widetilde{A}$ 和具有(psb)性质,则 μ 是 p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$.

证明 对于任何$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$, $\widetilde{E}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$ 且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$,则由命题 2.4.1 知存在$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c\right)\cup\widetilde{E}\right)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_i}^c\right)\cup\widetilde{E}\right).$$

对于子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$应用μ具有(PSB)性质，我们能够找到$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_{i_k}}\}$使得

$$\mu\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\right)=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\right)=\mu(\widetilde{A}),$$

再由μ是p. 0-add. $/\widetilde{A}$及命题7.1.4

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu\left((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{E}\right)&=(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu\left((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}^c)\cup\widetilde{E}\right)\\&\leqslant\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\left((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}^c)\cup\widetilde{E}\right)\right)\\&=\mu\left(\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)^c\right)\cup\widetilde{E}\right)\\&=\mu(\widetilde{E}),\end{aligned}$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu\left((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{E}\right)=\mu(\widetilde{E}).$$

结合命题7.1.7和定理7.3.3，7.3.4，我们得到以下定理.

定理7.3.5 设μ是$\mathscr{F}_0$上的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$，如果$\mu$是p. autoc. $\uparrow/\widetilde{A}$，则μ是p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$.

进一步地，我们有：

定理7.3.6 设μ是$\mathscr{F}_0$上的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$，则下述命题等价：

(1) μ是p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$；

(2) μ是p. autoc. $\uparrow/\widetilde{A}$；

(3) μ是p. autoc. $/\widetilde{A}$.

证明 由定理7.3.5知，我们只要证明当μ是p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$时，μ是p. autoc. $\uparrow/\widetilde{A}$. 事实上，对于任何$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，$\widetilde{E}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$，由命题2.4.1存在$\{\widetilde{B}_n\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$使得

$$(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{B}_n)=(\widetilde{\rho})\ \lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{B}_{n_i}).$$

因为 μ 是 p. autoc. $\downarrow/\widetilde{A}$，所以，由命题 7.3.2 知，μ 具有(psa)性质，从而存在$\{\widetilde{B}_{n_i}\}$的子序列$\{\widetilde{B}_{n_{i_k}}\}$使得

$$\mu\Big(\Big(\widetilde{E}\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)\cup\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)^c\Big)\Big)$$
$$=\mu\Big(\widetilde{E}\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big).$$

再由定理 7.3.2 和命题 7.1.7 知 μ 是 p. 0-add. $/\widetilde{A}$ 知

$$\begin{aligned}
\mu(\widetilde{E})\geqslant(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{B}_n)&=(\widetilde{\rho})\ \lim_{k\to\infty}\mu\Big(\widetilde{E}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}\Big)\\
&\geqslant\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{E}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)\\
&=\mu\Big(\widetilde{E}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{i_k}}\Big)\Big)\\
&\geqslant\mu\Big(\widetilde{E}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)\Big)\\
&=\mu\Big(\Big(\widetilde{E}\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)\\
&\qquad\cup\Big(\widetilde{A}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)^c\Big)\Big)\\
&\geqslant\mu\Big(\Big(\widetilde{E}\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)\\
&\qquad\cup\Big(\widetilde{E}\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\Big)^c\Big)\Big)\\
&=\mu(\widetilde{E}).
\end{aligned}$$

故

$$(\widetilde{\rho})\ \lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{E}).$$

推论 7.3.1 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\mathscr{F})\neq\widetilde{\infty}$ 及 $\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$，则 μ 是 p. autoc. $/\widetilde{A}$ 当且仅当 μ 是 p. 0-add. $/\widetilde{A}$和具有(psa)性质.

证明 由命题 7.1.7 和定理 7.3.2, 7.3.6 可得.

定理 7.3.7 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的伪自连续模糊值模糊测度, $\mu(\mathscr{F})\in A^*$, 则

(1) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$, $\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$,

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty},$$

如果
$$(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n)=\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n),$$

则
$$(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n);$$

(2) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$, $\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$,

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty},$$

如果
$$(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n)=\mu(\underline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n),$$

则
$$(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n);$$

(3) 对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$, $\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$,

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty},$$

如果
$$\mu(\underline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n)=\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n),$$

则
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\triangle\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n).$$

证明

(1) 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$, $\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$, 且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)$ $=\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$, 由命题 2.4.1 知, 存在 $\{\widetilde{B}_n\}$ 和 $\{\widetilde{C}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_i}\}$ 和 $\{\widetilde{C}_{n_i}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_i}^c)\cup\widetilde{C}_{n_i}).$$

再由命题 7.3.2, 对于任何 $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$, 存在 $\{\widetilde{B}_{n_i}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu\left(\widetilde{C}\cup\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{B}_{n_{i_k}}\cap\widetilde{A})\right)^c\right)\right)=\mu(\widetilde{C}).$$

因此，由 μ 的关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加性及命题 7.1.4 和 $(\widetilde{\rho})\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n)=\mu(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n)$ 知

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}_n)\\
&=(\widetilde{\rho})\ \lim_{k\to\infty}\mu\left((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}^c)\cup\widetilde{C}_{n_{i_k}}\right)\\
&\leqslant\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\left((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}}^c)\cup\widetilde{C}_{n_{i_k}}\right)\right)\\
&=\mu\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{C}_{n_{i_k}}\right)\cup\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)^c\right)\right)\\
&\leqslant\mu\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{C}_{n_{i_k}}\right)\cup\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\right)^c\right)\right)\\
&=\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\widetilde{C}_{n_{i_k}}\right)\leqslant\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n)\\
&=(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n).
\end{aligned}$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n).$$

(2) 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$，$\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$ 且 $(\widetilde{\rho})\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，则由命题 2.4.1，存在 $\{\widetilde{B}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_i}\}$ 和 $\{\widetilde{C}_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{C}_{n_i}\}$ 使得

$$(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\ \lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{B}_{n_i}\cap\widetilde{C}_{n_i}).$$

再由命题 7.3.4，存在 $\{\widetilde{B}_{n_i}\}$ 的子序列 $\{\widetilde{B}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu\left(\widetilde{A}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{i_k}}\right)\right)=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_{n_{i_k}})\right)=\mu(\widetilde{A}),$$

从而，由 μ 关于 $\widetilde{A}$ 伪零可减性及命题 7.1.4 和 $(\widetilde{\rho})\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n)=\mu(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n)$ 知

$$(\widetilde{\rho})\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\ \lim_{k\to\infty}\mu\left(\widetilde{B}_{n_{i_k}}\cap\widetilde{C}_{n_{i_k}}\right)$$

$$\geqslant\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\widetilde{B}_{n_{i_k}}\cap\widetilde{C}_{n_{i_k}})\Big)$$

$$=\mu\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{B}_{n_{i_k}}\Big)\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{C}_{n_{i_k}}\Big)\Big)$$

$$=\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\widetilde{C}_{n_{i_k}}\Big)$$

$$\geqslant\mu(\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n).$$

从而,我们得到

$$(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n).$$

(3) 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}$, $\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}$,

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$$

及
$$\mu(\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{C}_n)=\mu(\varlimsup_{n\to\infty}\widetilde{C}_n),$$

则由命题 7.1.4 知

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{C}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n)\leqslant\mu(\varlimsup_{n\to\infty}\widetilde{C}_n).$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n)=\mu(\varlimsup_{n\to\infty}\widetilde{C}_n)=\mu(\varliminf_{n\to\infty}\widetilde{C}_n).$$

因此,我们由(1)和(2)得到

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n)&=(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{C}_n)\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\triangle\widetilde{C}_n)\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\triangle\widetilde{C}_n)\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n),\end{aligned}$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\triangle\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n).$$

推论 7.3.2 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$ 及 $\mu(\mathscr{F}_0)\in A^*$，则下列命题等价：

(1) μ 是 p. autoc. $/\widetilde{A}$；

(2) 对于任何 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{C}_n\}\subset\mathscr{F}_0\cap\widetilde{A}$，

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}),$$

如果 $(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n)=\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n)$，

则
$$(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\cup\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n);$$

(3) 对于任何 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}),$$

如果 $(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n)=\mu(\underline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n)$，

则
$$(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{B}_n\cap\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{C}_n);$$

(4) 对于任何 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{C}_n\}\subset\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，

且
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A}),$$

如果
$$\mu(\underline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n)=\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\widetilde{C}_n),$$

则
$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n^c)\triangle\widetilde{C}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{C}_n).$$

证明 由定理 7.3.7 知，我们只要证明(2)⇒(1)，(3)⇒(1)和(4)⇒(1). 事实上，我们取 $\widetilde{C}_n=\widetilde{C}$，$n=1,2,\cdots$ 再由定理 7.3.6 及定理 2.4.3，我们即可证明(2)⇒(1)和(3)⇒(1). 下面我们证明(4)⇒(1). 取 $\widetilde{C}_n=\widetilde{C}$，$n=1,2,\cdots$，由 $(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$ 知，

$$\mu(\widetilde{A})=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}_n\cup\widetilde{C}))$$
$$\leqslant(\widetilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}_n\cup\widetilde{C}))\leqslant\mu(\widetilde{A})$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap(\widetilde{B}_n\cup\widetilde{C}))=\mu(\widetilde{A}).$$

因此,

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\tilde{A}\cap\tilde{B}_n^c)\cup\tilde{C})=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{C}\triangle((\tilde{A}\cap\tilde{B}_n^c)\cap\tilde{C}^c))$$
$$=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{C}\triangle(\tilde{A}\cap(\tilde{B}_n\cup\tilde{C})^c))$$
$$=\mu(\tilde{C}).$$

即 μ 是 p. autoc. $\downarrow/\tilde{A}$,再由定理 7.3.6 知 μ 是 p. autoc. $/\tilde{A}$.

定理 7.3.8 设 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度,$\mu(\mathscr{F})\in A^*$,如果 μ 是伪自连续的,则

(1) 对于任何 $\tilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\tilde{B}_n\}$,$\{\tilde{C}_n\}\subset\mathscr{F}$,$\tilde{D}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}$,

且 $$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n)\wedge\mu(\tilde{A}\cap\tilde{C}_n))=\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty},$$

则 $$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{B}_n\cap\tilde{C}_n\cap\tilde{D})=\mu(\tilde{D});$$

(2) 对于任何 $\tilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\tilde{B}_n\}$,$\{\tilde{C}_n\}\subset\mathscr{F}$,$\tilde{D}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}$,

且 $$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n)\wedge\mu(\tilde{A}\cap\tilde{C}_n))=\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty},$$

则 $$(\tilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\tilde{B}_m\cap\tilde{C}_n\cap\tilde{D})=\mu(\tilde{D}).$$

证明

(1) 设 $\tilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\tilde{B}_n\}$,$\{\tilde{C}_n\}\subset\mathscr{F}$,$\tilde{D}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}$,

且 $$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n)\wedge\mu(\tilde{A}\cap\tilde{C}_n))=\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty},$$

则 $$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n)=\mu(\tilde{A})$$

且 $$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\tilde{C}_n)=\mu(\tilde{A}).$$

由命题 2.4.1,存在 $\{\tilde{B}_n\}$ 和 $\{\tilde{C}_n\}$ 的子序列 $\{\tilde{B}_{n_i}\}$ 和 $\{\tilde{C}_{n_i}\}$ 使得

$$(\tilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu(\tilde{B}_n\cap\tilde{C}_n\cap\tilde{D})=(\tilde{\rho})\lim_{i\to\infty}\mu(\tilde{B}_{n_i}\cap\tilde{C}_{n_i}\cap\tilde{D}).$$

根据命题 7.3.4,存在 $\{\tilde{B}_{n_i}\}$ 的子序列 $\{\tilde{B}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu(\tilde{A}\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\tilde{B}_{n_{i_k}}))=\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}(\tilde{A}\cap\tilde{B}_{n_{i_k}}))=\mu(\tilde{A}).$$

再对 $\{\tilde{C}_{n_{i_k}}\}\subset\{\tilde{C}_{n_i}\}$ 使用命题 7.3.4,存在 $\{\tilde{C}_{n_{i_{k_m}}}\}\subset\{\tilde{C}_{n_{i_k}}\}$ 使得

$$\mu(\widetilde{A} \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} \widetilde{C}_{n_{i_{k_m}}})) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} (\widetilde{A} \cap \widetilde{C}_{n_{i_{k_m}}})) = \mu(\widetilde{A}).$$

从而，对于$\{\widetilde{B}_{n_{i_{k_m}}}\} \subset \{\widetilde{B}_{n_{i_k}}\}$也成立

$$\mu(\widetilde{A} \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} \widetilde{B}_{n_{i_{k_m}}})) = \mu(\widetilde{A}).$$

因此，

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n \cap \widetilde{C}_n \cap \widetilde{D}) \\
&= (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu(\widetilde{B}_{n_{i_{k_m}}} \cap \widetilde{C}_{n_{i_{k_m}}} \cap \widetilde{D}) \\
&\geqslant \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} (\widetilde{B}_{n_{i_{k_m}}} \cap \widetilde{C}_{n_{i_{k_m}}} \cap \widetilde{D})) \\
&= \mu((\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} \widetilde{B}_{n_{i_{k_m}}}) \cap ((\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} \widetilde{C}_{n_{i_{k_m}}}) \cap \widetilde{D})) \\
&= \mu((\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} \widetilde{C}_{n_{i_{k_m}}}) \cap \widetilde{D}) \\
&= \mu(\widetilde{D}).
\end{aligned}$$

(2) 类似可证.

推论 7.3.3 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{F}_0) \in A^*$，则下列命题等价：

(1) μ 是 p. autoc.；

(2) 对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{B}_n\}$，$\{\widetilde{C}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，$\widetilde{D} \in \widetilde{A} \cap \mathscr{F}_0$，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} (\mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}_n) \wedge \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{C}_n)) = \mu(\widetilde{A}),$$

则

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n \cap \widetilde{C}_n \cap \widetilde{D}) = \mu(\widetilde{D});$$

(3) 对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}_0$，$\{\widetilde{B}_n\}$，$\{\widetilde{C}_n\} \subset \mathscr{F}_0$，$\widetilde{D} \in \widetilde{A} \cap \mathscr{F}_0$，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} (\mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}_n) \wedge \mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{C}_n)) = \mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty},$$

则

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\widetilde{B}_m \cap \widetilde{C}_n \cap \widetilde{D}) = \mu(\widetilde{D}).$$

证明 由定义 7.3.1 及定理 7.3.6,7.3.8 可证.

定义 7.3.4 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$,$\widetilde{A}\in\mathscr{C}$,称模糊值模糊集函数 μ: $\mathscr{C}\to\mathscr{F}_+^*(R)$是关于 $\widetilde{A}$ 一致伪上自连续的,记为 u.p. autoc. ↓$/\widetilde{A}$(分别地,关于 $\widetilde{A}$ 一致伪下自连续的,记为 u.p. autoc. ↑$/\widetilde{A}$),如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{C}$,$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{C}$,当 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\cup\widetilde{C}\in\mathscr{C}$(分别地,$\widetilde{B}\cap\widetilde{C}\in\mathscr{C}$),$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}),\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}))<\delta$ 时,有

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\cup\widetilde{C}),\mu(\widetilde{C}))<\varepsilon$$

$$(\text{分别地},\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}),\mu(\widetilde{C}))<\varepsilon);$$

μ 叫做关于 $\widetilde{A}$ 一致伪自连续的,记为 u.p.autoc.$/\widetilde{A}$,如果 μ 是关于 $\widetilde{A}$ 一致上自连续的,又是关于 $\widetilde{A}$ 一致下自连续的;称 μ 是一致伪上自连续的,记为 u.p.autoc.↓(分别地,一致伪下自连续的,一致伪自连续的,记为 u.p.autoc.↑和 u.p.autoc.),如果 μ 关于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,是一致伪上自连续的(分别地,一致伪下自连续的,一致伪自连续的).

命题 7.3.5 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$,$\widetilde{A}\in\mathscr{C}$,$\mu$ 是 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$ 上的模糊值模糊集函数,$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,则

(1) 如果 μ 是 u.p.autoc.↓$/\widetilde{A}$,则它是 p.autoc.↓$/\widetilde{A}$;

(2) 如果 μ 是 u.p.autoc.↑$/\widetilde{A}$,则它是 p.autoc.↑$/\widetilde{A}$.

证明

(1) 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{C}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,$\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{C}$,$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{C}$ 且 $\{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{C}$ 及$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$,由于 μ 是 u.p.autoc.↓$/\widetilde{A}$,所以对于任何给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{C}$,$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{C}$,$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}\in\mathscr{C}$,当 $\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}),\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}))<\delta$,$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\cup\widetilde{C}\in\mathscr{C}$ 时,有

$$\mu(((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\cup\widetilde{C}),\mu(\widetilde{C}))<\varepsilon.$$

对于此 $\delta>0$,由于$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}_n)=\mu(\widetilde{A})$,于是存在 $N>0$,当 n

$\geqslant N$ 时，有

$$\tilde{\rho}(\mu(\tilde{A}),\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n))<\delta.$$

因此，当 $\{(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n^c)\cup\tilde{C}\}\subset\mathscr{C}$ 时

$$\tilde{\rho}(\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}_n^c)\cup\tilde{C}),\mu(\tilde{C}))<\varepsilon.$$

即

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\tilde{A}\cap\tilde{B}_n^c)\cup\tilde{C})=\mu(\tilde{C}).$$

(2) 类似(1)可证.

推论 7.3.4 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}(X)$，$\mathscr{C}$ 上的一致伪自连续的模糊值模糊集函数一定是伪自连续的.

证明 由命题 7.3.5 立得.

命题 7.3.6 设 μ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度，则下列命题等价：

(1) μ 是 u. p. autoc. ;

(2) μ 是 u. p. autoc. $\downarrow$;

(3) μ 是 u. p. autoc. $\uparrow$;

(4) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于任何 $\tilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$，$\tilde{B}\in\mathscr{F}_0$，$\tilde{C}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，当 $\tilde{\rho}(\mu(\tilde{A}),\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}))<\delta$ 时，有

$$\tilde{\rho}((\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}^c)\triangle\tilde{C}),\mu(\tilde{C}))<\varepsilon.$$

证明 (1)⇒(2)和(1)⇒(3)显然.

(2)⇒(3)对于任意给定的 $\varepsilon>0$，和任何的 $\tilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$，$\tilde{B}\in\mathscr{F}_0$，$\tilde{C}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，则 $\tilde{B}\cap\tilde{C}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，由于 μ 是 u. p. autoc. $\downarrow$，所以，当 $\tilde{\rho}(\mu(\tilde{A}),\mu(\tilde{A}\cap\tilde{B}))<\delta$ 时，对于 $\tilde{C}\cap\tilde{B}\in\tilde{A}\cap\mathscr{F}_0$ 有

$$\tilde{\rho}(\mu((\tilde{A}\cap\tilde{B}^c)\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})),\mu(\tilde{C}\cap\tilde{B}))<\varepsilon.$$

从而由 $\tilde{C}=\tilde{C}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{B}^c)=(\tilde{C}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{C}\cap\tilde{B}^c)\subset(\tilde{C}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{B}^c)$ 及定理 2.2.2 得

$$\tilde{\rho}(\mu(\tilde{C}),\mu(\tilde{C}\cap\tilde{B}))\leqslant\tilde{\rho}(\mu((\tilde{A}\cap\tilde{B}^c)\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})),$$

$$\mu(\widetilde{C} \cap \widetilde{B})) < \varepsilon.$$

即 μ 是 u. p. autoc. $\uparrow$. 从而也就证明了(2)⇒(1).

(3)⇒(2)对于任意给定的 $\varepsilon>0$,和任何的 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$, $\widetilde{B}\in\mathscr{F}_0$, $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$, 则 $\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$, 由 μ 是 u. p. autoc. $\uparrow$, 所以, 当 $\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}),\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}))<\delta$ 时, 对于 $\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\in\mathscr{F}_0$ 有

$$\rho(\mu(\widetilde{B} \cap (\widetilde{C} \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c)),\mu(\widetilde{C} \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c))) < \varepsilon.$$

又由于 $\widetilde{C}\supset\widetilde{B}\cap\widetilde{C}=(\widetilde{B}\cap\widetilde{C})\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c\cap\widetilde{B})$

$$=\widetilde{B}\cap(\widetilde{C}\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)),$$

所以, 由定理 2.2.2 我们有

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{C} \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c)),\mu(\widetilde{C}))$$

$$\leqslant \widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{B} \cap (\widetilde{C} \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c)),\mu(\widetilde{C} \cup (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c))) < \varepsilon.$$

即 μ 是 u. p. autoc. $\downarrow$, 从而我们也证明了(3)⇒(1).

(3)⇒(4)对于任意给定的 $\varepsilon>0$, $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$, 因为 μ 是 u. p. autoc. $\uparrow$, 所以, 存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$, 对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{F}_0$, $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$, 当 $\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}),\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}))<\delta_1$ 时, 有

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{C}),\mu(\widetilde{C} \cap \widetilde{B})) < \varepsilon/2.$$

再由 μ 是 u. p. autoc. $\uparrow$ 一定是 u. p. autoc. $\downarrow$, 存在 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$, 对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{F}_0$, $\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$, 当 $\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}),\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}))<\delta_2$ 时, 有

$$\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c) \cup \widetilde{C}),\mu(\widetilde{C})) < \varepsilon/2,$$

取 $\delta=\delta_1\wedge\delta_2$, 当 $\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}),\mu(\widetilde{B}\cap\widetilde{A}))<\delta$ 时, 由

$$(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c) \cup \widetilde{C} \supset (\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c)\triangle\widetilde{C} \supset \widetilde{B} \cap \widetilde{C}$$

和 $(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\cup\widetilde{C}\supset\widetilde{C}\supset\widetilde{B}\cap\widetilde{C}$, 及定理 2.2.2

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c)\triangle\widetilde{C}),\mu(\widetilde{C}))$$

$$\leqslant\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c) \cup \widetilde{C}),\mu(\widetilde{B} \cap \widetilde{C}))$$

$$\leqslant\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c) \cup \widetilde{C}),\mu(\widetilde{C})) + \widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{C}),\mu(\widetilde{B} \cap \widetilde{C}))$$

$$<\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(4)⇒(3)对于任意给定的 $\epsilon>0$，任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$ 及任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{F}_0$，$\widetilde{C}\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，由于(4)成立，所以存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$，当 $\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}),\mu(\widetilde{A}))<\delta$ 时，对于任何 $\widetilde{C}^*\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$ 有

$$\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\triangle\widetilde{C}^*),\mu(\widetilde{C}^*))<\epsilon.$$

我们取 $\widetilde{C}^*=\widetilde{C}\cap\widetilde{B}$，则 $\widetilde{C}^*\in\widetilde{A}\cap\mathscr{F}_0$，再由

$$\begin{aligned}\widetilde{C}&=\widetilde{C}\cap(\widetilde{B}\cup\widetilde{B}^c)=(\widetilde{C}\cap\widetilde{B})\cup(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}^c)\\&\subset(\widetilde{C}\cap\widetilde{B})\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\\&=[(\widetilde{C}\cap\widetilde{B})\cup(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)]\cap((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\cap(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}))^c\\&=(\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\triangle(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}),\end{aligned}$$

及定理 2.2.2，我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{C}),\widetilde{\mu}(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}))\\&\leqslant\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\triangle(\widetilde{C}\cap\widetilde{B})^c),\mu(\widetilde{C}\cap\widetilde{B}))\\&=\widetilde{\rho}(\mu((\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c)\triangle\widetilde{C}^*),\mu(\widetilde{C}^*))<\epsilon.\end{aligned}$$

即 μ 是 u.p.autoc.↑.从而我们完成了该命题的证明.

关于模糊值模糊测度的一些渐近结构特征关系，读者可用图简单示意，以加深对上述内容的理解与认识.

7.4 模糊值模糊测度扩张的必要条件与充分条件

设 $\mathscr{E}$，$\mathscr{A}$ 和 $\sigma_0(\mathscr{A})$，$\sigma(\mathscr{A})$ 都是模糊子集的非空类，特别，$\mathscr{A}$ 还表示模糊代数，$\sigma_0(\mathscr{A})$ 是含有 $\mathscr{A}$ 的一个模糊 σ-代数，$\sigma(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 产生的模糊 σ-代数. 我们还记

$\mathscr{A}_\sigma^+=\{\widetilde{B};\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，存在 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{A}$，使得 $\widetilde{B}_n\uparrow\widetilde{B}\}$；

$A_\sigma^-=\{\widetilde{B};\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，存在 $\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{A}$，使得 $\widetilde{B}_n\searrow\widetilde{B}\}$.

设 $\mu:\mathscr{E}\to\mathscr{F}_+^*(R)$，如果对于任何的 $\{\widetilde{E}_{n,k}\}\subset\mathscr{E}$，$\{\widetilde{F}_{m,l}\}\subset\mathscr{E}$ 满足

$$\widetilde{E}_{n,k}\nearrow \text{ 关于 } k;\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{F}_{n,k}\searrow \text{ 关于 } n; \tag{7.4.1}$$

$$\widetilde{F}_{m,l}\searrow \text{ 关于 } l;\ \bigcap_{l=1}^{\infty}\widetilde{F}_{m,l}\nearrow \text{ 关于 } m, \tag{7.4.2}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n,k}\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{l=1}^{\infty}\widetilde{F}_{m,l}, \tag{7.4.3}$$

总成立

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{E}_{n,k})\leqslant\lim_{m\to\infty}\lim_{l\to\infty}\mu(\widetilde{F}_{m,l}), \tag{7.4.4}$$

则称模糊值模糊集函数 μ 在 $\mathscr{E}$ 上满足 LU 不等式.

定理 7.4.1 $\mathscr{A}$ 上的模糊值模糊测度 μ 能够扩张为 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的模糊值模糊测度的必要条件是 μ 在 $\mathscr{A}$ 上满足 LU 不等式.

证明 设 μ' 是 μ 从 $\mathscr{A}$ 扩张到 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的模糊值模糊测度. $\{\widetilde{E}_{n,k}\}\subset\mathscr{A}$, $\{\widetilde{F}_{m,l}\}\subset\mathscr{A}$ 且满足条件(7.4.1)~(7.4.3), 由 $\sigma(\mathscr{A})$ 的定义知

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n,k}\in\sigma(\mathscr{A}),\quad\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{l=1}^{\infty}\widetilde{F}_{m,l}\in\sigma(\mathscr{A}).$$

这样由 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的模糊值模糊测度 μ' 的单调性及上、下连续性, 我们得到

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu'(\widetilde{E}_{n,k}) &= (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu'(\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n,k})\\ &=\mu'(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\widetilde{E}_{n,k})\leqslant\mu'(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{l=1}^{\infty}\widetilde{F}_{m,l})\\ &=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\mu'(\bigcap_{l=1}^{\infty}\widetilde{F}_{m,l})\\ &=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{l\to\infty}\mu(\widetilde{F}_{m,l}).\end{aligned}$$

我们再注意到, 当 $\widetilde{A}\in\mathscr{A}$ 时, $\mu'(\widetilde{A})=\mu(\widetilde{A})$, 于是,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{E}_{n,k}) &=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu'(\widetilde{E}_{n,k})\\ &\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{l\to\infty}\mu'(\widetilde{F}_{m,l})\\ &=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{l\to\infty}\mu(\widetilde{F}_{m,l}),\end{aligned}$$

因此，μ 在 $\mathscr{A}$ 上满足 LU 不等式.

定理 7.4.2 如果 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的下连续模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{A}) \in A^*$，则 μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上的下连续模糊值模糊测度 μ^*.

证明 对于任何 $\widetilde{B} \in \mathscr{A}_\sigma^+$，由 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 的定义，存在 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{A}$ 且 $\widetilde{A}_n \nearrow \widetilde{B}$，我们定义

$$\mu^*(\widetilde{B}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n).$$

这一定义是无歧义的. 事实上，如果存在 $\mathscr{A}$ 中的两个序列 $\{\widetilde{A}_n\}$ 和 $\{\widetilde{A}'_n\}$ 都有 $\widetilde{A}_n \nearrow \widetilde{B}$ 和 $\widetilde{A}'_n \nearrow \widetilde{B}$，则对于任意给定的正整数 n_0，$\widetilde{A}_n \nearrow \widetilde{B} \supset \widetilde{A}'_{n_0}$，因此，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) \geqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n \cap \widetilde{A}'_{n_0}) = \mu(\widetilde{A}'_{n_0}),$$

从而

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) \geqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}'_n).$$

我们可以同样证明

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}'_n) \geqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n).$$

故

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}'_n).$$

即 μ^* 的定义是无歧义的.

下面我们证明 μ^* 是 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上的下连续模糊值模糊测度.

(1) 单调性，设 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathscr{A}_\sigma^+$ 且 $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$，则存在 $\{\widetilde{A}_n\}, \{\widetilde{B}_n\} \subset \mathscr{A}$ 使得 $\widetilde{A}_n \nearrow \widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}_n \nearrow \widetilde{B}$. 因此，对于任意给定的正整数 n_0，

$$\widetilde{B}_n \cap \widetilde{A}_{n_0} \nearrow \widetilde{B} \cap \widetilde{A}_{n_0} = \widetilde{A}_{n_0},$$

从而

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n) \geqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n \cap \widetilde{A}_{n_0}) = \mu(\widetilde{A}_{n_0}).$$

由此推出

$$\mu^*(\widetilde{B}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}_n) \geqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A}_n) = \mu^*(\widetilde{A}).$$

即 μ^* 具有单调性.

(2) 下连续性. 设 $\{\widetilde{A}_n; n=0,1,2,\cdots\}\subset\mathscr{A}_\sigma^\downarrow$ 使得 $\widetilde{A}_n\nearrow\widetilde{A}_0$，由 $\mathscr{A}_\sigma^\downarrow$ 的构造，对于每一个 $n=0,1,2,\cdots$ 都存在 $\{\widetilde{A}_{nm}; m=1,2,\cdots\}\subset\mathscr{A}$ 使得

$$\widetilde{A}_{nm}\nearrow\widetilde{A}_n,\ n=0,1,2,3,\cdots.$$

运用锯齿对角法，记 $\widetilde{B}_1=\widetilde{A}_{11}$，$\widetilde{B}_2=\widetilde{A}_{12}$，$\widetilde{B}_3=\widetilde{A}_{21}$，$\widetilde{B}_4=\widetilde{A}_{13}$，$\widetilde{B}_5=\widetilde{A}_{22}$，$\cdots$，一般地，

$$\widetilde{B}_{\frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}+i}=\widetilde{A}_{ij},$$

并记

$$\widetilde{B}_n'=\bigcup_{i=1}^{n}\widetilde{B}_i,$$

则

$$\widetilde{B}_n'\nearrow\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n=\widetilde{A}_0$$

从而

$$\mu^*(\widetilde{A}_0)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n').$$

注意到，对于任意给定的正整数 n_0，都存在 $j=j(n_0)$ 使得 $\widetilde{B}_{n_0}'\subset\widetilde{A}_j$，以及 μ^* 的单调性，

$$\mu(\widetilde{B}_{n_0}')=\mu^*(\widetilde{B}_{n_0}')\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_j).$$

结果

$$\mu^*(\widetilde{A}_0)\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{j\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_j)$$

再由 $\widetilde{A}_j\subset\widetilde{A}_0$，$j=1,2,\cdots$，及 μ^* 的单调性，

$$(\widetilde{\rho})\lim_{j\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_j)\leqslant\mu^*(\widetilde{A}_0).$$

因此，我们有

$$\mu^*(\widetilde{A}_0)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

μ^* 是 μ 的扩张以及扩张的唯一性是显然的.

定理 7.4.3 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{A})\in\Lambda^*$，

则 μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上的模糊值模糊测度的充分条件是 μ 在 $\mathscr{A}$ 上满足 LU 不等式.

证明 仅需证明定理 7.4.2 中所定义的下连续模糊值模糊测度 μ^* 满足上连续性,事实上,设 $\{\widetilde{A}_n;n=0,1,2,\cdots\}\subset\mathscr{A}_\sigma^+$ 且 $\widetilde{A}_n\searrow\widetilde{A}_0$ 及存在 n_0 使得 $\mu^*(\widetilde{A}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$. 根据 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 的构造,对于任何的 n $(n=0,1,2,\cdots)$存在$\{\widetilde{A}_{nm}\}\subset\mathscr{A}$ 使得

$$\widetilde{A}_{nm}\nearrow\widetilde{A}_n,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

我们取

$$\widetilde{E}_{nm}=\widetilde{A}_{nm},\qquad n=1,2,\cdots,$$

$$\widetilde{F}_{pl}=\widetilde{A}_{0l},\qquad m,l=1,2,\cdots.$$

容易验证,$\{\widetilde{E}_{nm}\}$,$\{\widetilde{F}_{p,l}\}$满足(7.4.1)~(7.4.3)条件,应用 LU 不等式,我们得到

$$\begin{aligned}(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n)&=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\tilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\mu(\widetilde{A}_{nm})\\&=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}(\tilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\mu(\widetilde{E}_{nm})\\&\leqslant(\tilde{\rho})\lim_{p\to\infty}(\tilde{\rho})\lim_{l\to\infty}\mu(\widetilde{F}_{pl})\\&=(\tilde{\rho})\lim_{l\to\infty}\mu(\widetilde{A}_{0l})\\&=\mu^*(\widetilde{A}_0).\end{aligned}$$

再由 μ^* 的单调性,我们有

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n)\geqslant\mu^*(\widetilde{A}_0).$$

故

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(\widetilde{A}_n)=\mu^*(\widetilde{A}_0).$$

这样我们就证明了 μ^* 是 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上的模糊值模糊测度.

定义 7.4.1 设 μ 和 ν 都是 $\mathscr{E}$ 上的两个模糊值模糊测度,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得对于 $\mathscr{E}$ 中的任何模糊集 $\widetilde{E}$ 和 $\widetilde{F}$,只要 $\widetilde{E}\subset\widetilde{F}$ 且有 $\tilde{\rho}(\nu(\widetilde{F}),\nu(\widetilde{E}))<\delta$,成立

$$\tilde{\rho}(\mu(\widetilde{F}),\mu(\widetilde{E}))<\varepsilon,$$

则称 μ 关于 ν 是强绝对连续的,记为 $\mu\overset{s}{\ll}\nu$.

定理 7.4.4 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{A})\in A^{*}$，如果存在 $\mathscr{A}_{\sigma}^{+}$ 上的模糊值模糊测度 ν 使得在 $\mathscr{A}$ 上 μ 关于 ν 强绝对连续，则 μ 能够唯一地扩张为 $\mathscr{A}_{\sigma}^{+}$ 上的模糊值模糊测度，且保持对 ν 的强绝对连续性.

证明 仅需证明定理 7.4.2 的证明过程中给出的 μ^{*} 是上连续的以及扩张的唯一性与保持强绝对连续性. 假设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{A}_{\sigma}^{+}$ 且 $\widetilde{A}_n\searrow\widetilde{A}_0\in\mathscr{A}_{\sigma}^{+}$ 且存在 n_0 使得 $\mu^{*}(\widetilde{A}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$. 由 $\mathscr{A}_{\sigma}^{+}$ 的构造，对于每一个 $n=0,1,2,\cdots$，存在 $\{\widetilde{A}_{nm}\}\subset\mathscr{A}$ 使得 $\widetilde{A}_{nm}\nearrow\widetilde{A}_n, n=0,1,2,\cdots$. 因为对于每一个 $n=1,2,\cdots$，有 $\widetilde{A}_0\subset\widetilde{A}_n$，不失一般性. 我们假设 $\widetilde{A}_{0m}\subset\widetilde{A}_{nm}$，对于 $m,n=1,2,\cdots$成立. 由于在 $\mathscr{A}$ 上 $\mu\overset{s}{\ll}\nu$，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于任何的 $\widetilde{E}\in\mathscr{A}$，$\widetilde{F}\in\mathscr{A}$，只要 $\widetilde{E}\subset\widetilde{F}$ 且 $\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{F}),\nu(\widetilde{E}))<\delta$ 时，我们就有

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{F}),\mu(\widetilde{E}))<\varepsilon/2,$$

即

$$\mu(\widetilde{F})<\mu(\widetilde{E})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 ν 的连续性及 $\mathscr{A}_{\sigma}^{+}$ 上 μ^{*} 的定义知，存在 N 和 N' 使得

$$\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{A}_N),\nu(\widetilde{A}_0))<\frac{\delta}{2}$$

和

$$\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{A}_0),\nu(\widetilde{A}_{0N'}))<\frac{\delta}{2},$$

及

$$\widetilde{\rho}(\mu^{*}(\widetilde{A}_N),\mu(\widetilde{A}_{NN'}))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样，我们就有

$$\nu(\widetilde{A}_N)<\nu(\widetilde{A}_0)+\frac{\delta}{2}$$

和

$$\nu(\widetilde{A}_0) < \nu(\widetilde{A}_{0N'}) + \frac{\delta}{2},$$

从而

$$\nu(\widetilde{A}_{NN'}) \leqslant \nu(\widetilde{A}_N) < \nu(\widetilde{A}_0) + \frac{\delta}{2} < \nu(\widetilde{A}_{0N'}) + \delta,$$

故

$$\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{A}_{NN'}), \nu(\widetilde{A}_{0N'})) < \delta,$$

因此

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{A}_{NN'}), \mu(\widetilde{A}_{0N'})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样，

$$\mu(\widetilde{A}_{NN'}) < \mu(\widetilde{A}_{0N'}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

结果

$$\mu^*(\widetilde{A}_N) < \mu(\widetilde{A}_{NN'}) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu(\widetilde{A}_{0N'}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu^*(\widetilde{A}_0) + \varepsilon.$$

即

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu^*(\widetilde{A}_n) \leqslant \mu^*(\widetilde{A}_0),$$

注意到 μ^* 的单调性，我们得到

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu^*(\widetilde{A}_n) = \mu^*(\widetilde{A}_0).$$

用与上述类似的方法可以证明在 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上 $\mu^* \overset{s}{\leqslant} \nu$.

定义 7.4.2 $\sigma_0(\mathscr{A})$上的模糊值模糊测度 μ 称为是亲 $\mathscr{A}_\sigma^-$(分别地，$\mathscr{A}_\sigma^-$)的，如果对于任何的 $\widetilde{A} \in \sigma_0(\mathscr{A})$，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\widetilde{B} \in \mathscr{A}_\sigma^+$，使得 $\widetilde{B} \supset \widetilde{A}$(分别地，$\widetilde{B} \in \mathscr{A}_\sigma^-$，使得 $\widetilde{B} \subset \widetilde{A}$)，且

$$\mu(\widetilde{B}) \leqslant \mu(\widetilde{A}) + \varepsilon, (\text{分别地}, \mu(\widetilde{A}) \leqslant \mu(\widetilde{B}) + \varepsilon).$$

定理 7.4.5 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{A}) \in A^*$，如果存在 $\sigma_0(\mathscr{A})$上亲 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 的模糊值模糊测度 ν 使得在 $\mathscr{A}$ 上 $\mu \overset{s}{\ll} \nu$，则 μ 可以唯一地扩张为 $\sigma_0(\mathscr{A})$上的亲 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 的模糊值模糊测

度，且保持对 ν 的强绝对连续性.

证明 由定理 7.4.4 知，μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上的模糊值模糊测度 μ^* 且在 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上 $\mu^* \overset{s}{\ll} \nu$. 如果我们定义

$$\mu^{**}(\widetilde{A}) = \inf\{\mu^*(\widetilde{B}); \widetilde{A} \subset \widetilde{B} \in \mathscr{A}_\sigma^+\}, \forall\ \widetilde{A} \in \sigma_0(\mathscr{A}).$$

显然，μ^{**} 是单调的及在 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上与 μ^* 是一致的. 为了证明 μ^{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的连续性，我们假设 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \sigma_0(\mathscr{A})$ 且 $\widetilde{A}_n \searrow \mathscr{A}_0 \in \sigma_0(\mathscr{A})$. 且存在 n_0 使得 $\mu^{**}(\widetilde{A}_{n_0}) \neq \widetilde{\infty}$. 因为在 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 上 $\mu^* \overset{s}{\ll} \nu$，所以，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对于任何的 $\widetilde{E} \in \mathscr{A}_\sigma^+$ 和 $\widetilde{F} \in \mathscr{A}_\sigma^+$，只要 $\widetilde{E} \subset \widetilde{F}$ 且 $\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{F}), \nu(\widetilde{E})) < \delta$ 就有

$$\widetilde{\rho}(\mu^*(\widetilde{F}), \mu^*(\widetilde{E})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再由 ν 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的上连续性，对上述 $\delta > 0$，存在正整数 N 使得

$$\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{A}_N), \nu(\widetilde{A}_0)) < \frac{\delta}{2}.$$

注意到 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 对于有限交运算的封闭性，再由 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的 ν 亲 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 性及 μ^{**} 的定义，我们就可以找到 $\widetilde{B}_0 \in \mathscr{A}_\sigma^+$，$\widetilde{B}_N \in \mathscr{A}_\sigma^+$，使得 $\widetilde{A}_0 \subset \widetilde{B}_0$ 及 $\widetilde{A}_N \subset \widetilde{B}_N$ 且

$$\mu^*(\widetilde{B}_0) < \mu^{**}(\widetilde{A}_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$\nu(\widetilde{B}_N) < \nu(\widetilde{A}_N) + \frac{\delta}{2}.$$

这样，我们有

$$\nu(\widetilde{B}_N) < \nu(\widetilde{A}_N) + \frac{\delta}{2} < \nu(\widetilde{A}_0) + \delta \leqslant \nu(\widetilde{B}_0) + \delta,$$

从而

$$\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{B}_N), \nu(\widetilde{B}_0)) < \delta,$$

故

$$\tilde{\rho}(\mu^*(\tilde{B}_N), \mu^*(\tilde{B}_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

即

$$\mu^*(\tilde{B}_N) < \mu^*(\tilde{B}_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

结果

$$\mu^{**}(\tilde{A}_N) \leqslant \mu^*(\tilde{B}_N) < \mu^*(\tilde{B}_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu^{**}(\tilde{A}_0) + \varepsilon.$$

故

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu^{**}(\tilde{A}_n) = \mu^{**}(\tilde{A}_0).$$

即 μ^{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上是上连续的，用类似的方法可以证明 μ^{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上也是下连续的. 故 μ^{**} 是 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的模糊值模糊测度.

显然，μ^{**} 是亲 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 的，且它是 μ 的具有亲 $\mathscr{A}_\sigma^+$ 性的唯一扩张.

用与上述类似方法还可以证明 μ^{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上关于 ν 是强绝对连续的.

定理 7.4.6 如果 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的上连续模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{A}) \in A^*$，则 μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{A}_\sigma$ 上的上连续模糊值模糊测度 μ_*.

证明 对于任何 $\tilde{B} \in \mathscr{A}_\sigma$，由 $\mathscr{A}_\sigma$ 的定义，存在 $\{\tilde{A}_n\} \subset \mathscr{A}$ 且 $\tilde{A}_n \searrow \tilde{B}$，我们定义

$$\mu_*(\tilde{B}) = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A}_n).$$

这一定义是无歧义的. 事实上，如果存在 $\mathscr{A}$ 中的两个序列 $\{\tilde{A}_n\}$ 和 $\{\tilde{A}'_n\}$ 都有 $\tilde{A}_n \searrow \tilde{B}$ 和 $\tilde{A}'_n \searrow \tilde{B}$，则对于任意给定的正整数 n_0，$\tilde{A}_n \searrow \tilde{B} \subset \tilde{A}'_{n_0}$，因此，

$$\begin{aligned}(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A}_n) &\leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A}_n \cup \tilde{A}'_{n_0}) \\ &= \mu(\tilde{B} \cup \tilde{A}'_{n_0}) = \mu(\tilde{A}'_{n_0}).\end{aligned}$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}'_n).$$

同理可以证明

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}'_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n).$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}'_n).$$

即 μ_* 的定义是无岐义的.

下面我们证明 μ_* 是 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 上的上连续模糊值模糊测度.

(1) 单调性. 设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{A}_\sigma^-$ 且 $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$. 则存在 $\{\widetilde{A}_n\},\{\widetilde{B}_n\}\subset\mathscr{A}$ 使得 $\widetilde{A}_n\searrow\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}_n\searrow\widetilde{B}$. 因此, 对于任意给定的正整数 n_0,

$$\widetilde{B}_{n_0}\cup\widetilde{A}_n\searrow\widetilde{B}_{n_0}\cup\widetilde{A}=\widetilde{B}_{n_0},$$

从而

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)&\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_{n_0}\cup\widetilde{A}_n)\\&=\mu(\widetilde{B}_{n_0}\cup\widetilde{A})=\mu(\widetilde{B}_{n_0}).\end{aligned}$$

由此推出

$$\mu_*(\widetilde{A})=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}_n)\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{B}_n)=\mu_*(\widetilde{B}).$$

即 μ_* 是具有单调性的.

(2) 上连续性. 设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\mathscr{A}_\sigma^-$, $\widetilde{A}_0\in\mathscr{A}_\sigma^-$, 且 $\widetilde{A}_n\searrow\widetilde{A}_0$ 及存在正整数 n_0 使得 $\mu_*(\widetilde{A}_{n_0})\neq\widetilde{\infty}$. 由 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 的构造, 对于每一个 $n=0,1,2,\cdots$, 都存在 $\{\widetilde{A}_{nm}\}\subset\mathscr{A}$, 使得,

$$\widetilde{A}_{nm}\searrow\widetilde{A}_n,\ n=0,1,2,\cdots.$$

运用锯齿对角法, 记 $\widetilde{B}_1=\widetilde{A}_{11}$, $\widetilde{B}_2=\widetilde{A}_{12}$, $\widetilde{B}_3=\widetilde{A}_{21}$, $\widetilde{B}_4=\widetilde{A}_{13}$, $\widetilde{B}_5=\widetilde{A}_{22}$, ⋯ 一般地,

$$\widetilde{B}_{\frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2}+i}=\widetilde{A}_{ij},$$

并记

$$\widetilde{B}'_n=\bigcap_{i=1}^n\widetilde{B}_i,$$

则

$$\widetilde{B}'_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n = \widetilde{A}_0,$$

从而

$$\mu_*(\widetilde{A}_0) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{B}'_n).$$

注意到，对于任意给定的正整数 N，都存在 $j=j(N)$ 使得

$$\widetilde{A}_j \subset \widetilde{B}'_N.$$

再由 μ_* 的单调性，

$$\mu_*(\widetilde{A}_j) \leqslant \mu_*(\widetilde{B}'_N) = \mu(\widetilde{B}'_N).$$

结果

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_*(\widetilde{A}_n) \leqslant \mu_*(\widetilde{A}_0).$$

再利用 μ_* 的单调性，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_*(\widetilde{A}_n) \geqslant \mu_*(\widetilde{A}_0).$$

故

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_*(\widetilde{A}_n) = \mu_*(\widetilde{A}_0).$$

从而我们证明了 μ_* 是 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 上的上连续模糊值模糊测度.

μ_* 是 μ 的扩张及扩张的唯一性是显然的.

定理 7.4.7 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{A}) \in A^*$，则 μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 上的模糊值模糊测度的充分条件是 μ 在 $\mathscr{A}$ 上满足 LU 不等式.

证明 仅需证明定理 4.7.6 中所定义的上连续模糊值模糊测度 μ_* 是下连续的. 事实上，设 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{A}_\sigma^-$，$\widetilde{A}_0 \in \mathscr{A}_\sigma^-$，则由 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 的定义，对于任何的 $n=0,1,2,\cdots$，存在 $\{\widetilde{A}_{nm}\} \subset \mathscr{A}$ 使得

$$\widetilde{A}_{nm} \searrow \widetilde{A}_n,\ n = 0,1,2,\cdots,$$

我们取 $\widetilde{E}_{0n,k} = \widetilde{A}_{0,n}$，$\widetilde{F}_{m,l} = \widetilde{A}_{m,l}$，容易验证，$\{\widetilde{E}_{n,k}\}$ 和 $\{\widetilde{F}_{m,l}\}$ 满足条件 (7.4.1)～(7.4.3)，因此，应用 LU 不等式，我们得到

$$\mu_*(\widetilde{A}_0) = (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu(\widetilde{A}_{0m}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} (\widetilde{\rho}) \lim_{k\to\infty} \mu(\widetilde{E}_{n,k})$$

$$\leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} (\widetilde{\rho}) \lim_{l\to\infty} \mu(\widetilde{F}_{m,l})$$
$$= (\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu_*(\widetilde{A}_m).$$

再由 μ_* 的单调性,我们有

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{m\to\infty} \mu_*(\widetilde{A}_m) \leqslant \mu_*(\widetilde{A}_0).$$

故

$$\mu_*(\widetilde{A}_0) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_*(\widetilde{A}_n).$$

即 μ_* 是下连续的,从而我们证明了 μ_* 是 $\mathscr{A}_\sigma$ 上的模糊值模糊测度.

定理 7.4.8 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的模糊值模糊测度,$\mu(\mathscr{A}) \in A^*$,如果存在 $\mathscr{A}_\sigma$ 上的模糊值模糊测度 ν 使得在 $\mathscr{A}$ 上 μ 关于 ν 强绝对连续的,则 μ 能够唯一地扩张为 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 上的模糊值模糊测度,且保持对 ν 的强绝对连续性.

证明 仅需证明定理 7.4.6 证明过程中给出的 μ_* 是下连续的以及扩张的唯一性与保持强绝对连续性. 假设 $\{\widetilde{A}_n\} \subset \mathscr{A}_\sigma$,$\widetilde{A}_0 \in \mathscr{A}_\sigma^-$ 且 $\widetilde{A}_n \nearrow \widetilde{A}_0$,由 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 的构造,对于每一个 $n=0,1,2,\cdots$,存在 $\{\widetilde{A}_{nm}\} \subset \mathscr{A}$ 使得 $\widetilde{A}_{nm} \searrow \widetilde{A}_n$, $n=0,1,2,\cdots$. 因为对于任何正整数 n,有 $\widetilde{A}_n \subset \widetilde{A}_0$,不失一般性,我们假定 $\widetilde{A}_{nm} \subset \widetilde{A}_{0m}$, $n,m=1,2,\cdots$. 由于在 $\mathscr{A}$ 上 $\mu \overset{s}{\ll} \nu$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得对于任何的 $\widetilde{E},\widetilde{F} \in \mathscr{A}$ 且 $\widetilde{E} \subset \widetilde{F}$ 及 $\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{E}),\nu(\widetilde{F}))<\delta$ 时,我们就有

$$\widetilde{\rho}(\mu(\widetilde{F}),\mu(\widetilde{E})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

即

$$\mu(\widetilde{F}) < \mu(\widetilde{E}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 ν 的连续性及 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 上的 μ_* 的定义,存在 N 和 N' 使得

$$\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{A}_N),\nu(\widetilde{A}_0)) < \frac{\delta}{2}$$

和

$$\tilde{\rho}(\nu(\tilde{A}_0),\nu(\tilde{A}_{0N'}))<\frac{\delta}{2},$$

及

$$\tilde{\rho}(\mu_*(\tilde{A}_N),\mu(\tilde{A}_{NN'}))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样，我们就有

$$\nu(\tilde{A}_0)-\frac{\delta}{2}<\nu(\tilde{A}_N)$$

和

$$\nu(\tilde{A}_{0N'})<\nu(\tilde{A}_0)+\frac{\delta}{2}.$$

从而

$$\nu(\tilde{A}_{0N'})<\nu(\tilde{A}_0)+\frac{\delta}{2}<\nu(\tilde{A}_N)+\delta\leqslant\nu(\tilde{A}_{NN'})+\delta,$$

故

$$\tilde{\rho}(\nu(\tilde{A}_{0N'}),\nu(\tilde{A}_{NN'}))<\delta.$$

因此

$$\tilde{\rho}(\mu(\tilde{A}_{0N'}),\mu(\tilde{A}_{NN'}))<\frac{\varepsilon}{2},$$

这样

$$\mu(\tilde{A}_{0N'})<\mu(\tilde{A}_{NN'})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

结果

$$\mu_*(\tilde{A}_0)\leqslant\mu(\tilde{A}_{0N'})<\mu(\tilde{A}_{NN'})+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$<\mu_*(\tilde{A}_N)+\varepsilon.$$

即

$$(\tilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\mu_*(\tilde{A}_n)\geqslant\mu_*(\tilde{A}_0).$$

再注意到 μ_* 的单调性，我们得到

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu_*(\widetilde{A}_n)=\mu_*(\widetilde{A}_0),$$

即 μ_* 是下连续的.

用与上述类似方法可以证明在 $\mathscr{A}_\sigma$ 上 $\mu_*\overset{s}{\ll}\nu$.

定理 7.4.9 设 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的模糊值模糊测度，$\mu(\mathscr{A})\in A^*$，如果存在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上亲 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 上的模糊值模糊测度 ν 使得在 $\mathscr{A}$ 上 $\mu\overset{s}{\ll}\nu$，则 μ 可以唯一地扩张为 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的亲 $\mathscr{A}_\sigma$ 的模糊值模糊测度，且保持对 ν 的强绝对连续性.

证明 由定理 7.4.8 知，μ 可以唯一地扩张为 $\mathscr{A}_\sigma$ 上的模糊值模糊测度 μ_* 且在 $\mathscr{A}_\sigma$ 上 $\mu_*\overset{s}{\ll}\nu$. 如果我们定义

$$\mu_{**}(\widetilde{A})=\sup\{\mu_*(\widetilde{B});\ \widetilde{B}\subset\widetilde{A},\ \widetilde{B}\in\mathscr{A}_\sigma^-\},\ \forall\ \widetilde{A}\in\sigma_0(\mathscr{A}).$$

我们只须证明 μ_{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的连续性，这是因为 μ_{**} 的单调性及 μ_{**} 是 μ_* 的扩张是显然. 我们假设 $\{\widetilde{A}_n\}\subset\sigma_0(\mathscr{A})$，$\widetilde{A}_0\in\sigma_0(\mathscr{A})$，且 $\widetilde{A}_n\nearrow\widetilde{A}_0$. 因为在 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 上 $\mu_*\overset{s}{\ll}\nu$，所以，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对于任何的 $\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{A}_\sigma^-$，只要 $\widetilde{E}\subset\widetilde{F}$ 且 $\tilde{\rho}(\nu(\widetilde{F}),\nu(\widetilde{E}))<\delta$ 时就有

$$\tilde{\rho}(\mu^*(\widetilde{F}),\mu^*(\widetilde{E}))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再由 ν 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的连续性，对于上述 $\delta>0$，存在正整数 N 使得

$$\tilde{\rho}(\nu(\widetilde{A}_N),\nu(\widetilde{A}_0))<\frac{\delta}{2}.$$

注意到 $\mathscr{A}_\sigma$ 对于有限并运算的封闭性，再由 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上的 ν 亲 $\mathscr{A}_\sigma^-$ 性及 μ_{**} 的定义，我们能够找到 $\widetilde{B}_0\in\mathscr{A}_\sigma$，$\widetilde{B}_N\in\mathscr{A}_\sigma^-$ 使得 $\widetilde{B}_0\subset\widetilde{A}_0$，$\widetilde{B}_N\subset\widetilde{A}_N$. 且

$$\mu_{**}(\widetilde{A}_0)<\mu_*(\widetilde{B}_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$\nu(\widetilde{A}_N) < \nu(\widetilde{B}_N) + \frac{\delta}{2}.$$

这样，我们有

$$\nu(\widetilde{B}_0) \leqslant \nu(\widetilde{A}_0) < \nu(\widetilde{A}_N) + \frac{\delta}{2} < \nu(\widetilde{B}_N) + \delta,$$

从而

$$\widetilde{\rho}(\nu(\widetilde{B}_0), \nu(\widetilde{B}_N)) < \delta.$$

故

$$\widetilde{\rho}(\mu_*(\widetilde{B}_0), \mu_*(\widetilde{B}_N)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

即

$$\mu_*(\widetilde{B}_0) < \mu_*(\widetilde{B}_N) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

结果

$$\mu_{**}(\widetilde{A}_0) \leqslant \mu_*(\widetilde{B}_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \mu_*(\widetilde{B}_N) + \varepsilon \leqslant \mu_{**}(\widetilde{A}_N) + \varepsilon.$$

因此，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_{**}(\widetilde{A}_n) = \mu_{**}(\widetilde{A}_0).$$

即 μ_{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上是下连续的，用类似的方法可以证明 μ_{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上也是上连续的.

μ_{**} 是亲 $\mathscr{A}_\sigma$ 的及它是 μ 的具有亲 $\mathscr{A}_\sigma$ 性的唯一扩张是显然的.

μ_{**} 在 $\sigma_0(\mathscr{A})$ 上关于 ν 是强绝对连续的证明是容易的.

第 8 章　模糊值模糊可测函数

8.1　模糊值模糊可测函数的定义及其性质

定义 8.1.1　设 X 是任一非空集，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个模糊 σ-代数，则称$(X,\mathscr{F})$为模糊可测空间，相应地，称 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素 $\widetilde{E}$ 为$(X,\mathscr{F})$上的模糊可测集.

定义 8.1.2　设$(X,\mathscr{F})$是模糊可测空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，实值函数 $f: X\to[-\infty,+\infty]$称为在 $\widetilde{E}$ 上关于$(X,\mathscr{F})$的模糊可测函数，如果对于任何的 $\alpha\in[-\infty,+\infty]$，有 $\widetilde{E}\cap\chi_{F_\alpha}\in\mathscr{F}$.

定义 8.1.3　设$(X,\mathscr{F})$是模糊可测空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，称模糊值函数 $\widetilde{f}: X\to\mathscr{F}^*(R)$在 $\widetilde{E}$ 上关于$(X,\mathscr{F})$是模糊可测的，简称 $\widetilde{E}$ 上模糊可测的，如果对于任何的 $\lambda\in(0,1]$，$f_\lambda(x)$和 $f_\lambda^+(x)$都是 $\widetilde{E}$ 上关于$(X,\mathscr{F})$实值模糊可测函数，其中

$$\widetilde{f}(x)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[(\widetilde{f}(x))_\lambda^-,(\widetilde{f}(x))_\lambda^+]\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[f_\lambda(x),f_\lambda^+(x)].$$

我们用 $FM(\widetilde{E})$表示 $\widetilde{E}$ 上实值模糊可测函数全体构成的集合，特别是当 $\widetilde{E}=X$ 时，简记 FM；用$\widetilde{FM}(\widetilde{E})$表示 $\widetilde{E}$ 上模糊值模糊可测函数全体构成的集合，特别地，当 $\widetilde{E}=X$ 时，简记为$\widetilde{FM}$.

注 8.1.1　(a) $FM(\widetilde{E})\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$；(b) $\widetilde{M}(\widetilde{E})\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$.

定理 8.1.1　设$\widetilde{f}$是一模糊值函数，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，如果对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\widetilde{E}\cap\chi_{\{f_\lambda^-(x)=-\infty\}}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{E}\cap\chi_{\{f_\lambda^+(x)=+\infty\}}\in\mathscr{F}$，则$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$和 $\alpha\in[-\infty,+\infty]$有 $\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}\in\mathscr{F}$ 和 $\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}\in\mathscr{F}$，其中

$$F^{-}_{\lambda,\tilde{\alpha}} = \{x;\ f^{-}_{\lambda}(x) > \alpha\},\ F^{+}_{\lambda,\tilde{\alpha}} = \{x;\ f^{+}_{\lambda}(x) > \alpha\}.$$

证明 类似定理 4.1.3.

定理 8.1.2 设$\tilde{f}$是一模糊值函数，$\tilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，则$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E})$的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[\ \ \infty,+\infty]$，有
$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;f^{-}_{\lambda}(x)-\infty\}}\in\mathscr{F}$，$\tilde{E}\cap\chi_{\{f^{+}_{\lambda}(x)=\infty\}}\in\mathscr{F}$，$\tilde{E}\cap\chi_{\{\alpha\leqslant f^{-}_{\lambda}(x)<\infty\}}\in\mathscr{F}$ 和
$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;\alpha\leqslant f^{+}_{\lambda}(x)<\infty\}}\in\mathscr{F}$.

证明 类似定理 4.1.4.

定理 8.1.3 设$\tilde{f}$是一模糊值函数，$\tilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，则$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E})$的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,\vdash\infty]$，有

$$\tilde{E}\cap\chi_{\{x;f^{-}_{\lambda}(x)\leqslant\alpha\}}\in\mathscr{F},\ \tilde{E}\cap\chi_{\{x;f^{+}_{\lambda}(x)\leqslant\alpha\}}\in\mathscr{F}.$$

证明 类似于定理 4.1.5.

定理 8.1.4 设$\tilde{f}$是一模糊值函数，$\tilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，则$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E})$的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[-\infty,+\infty]$，有

$$\tilde{E}\cap\chi_{\{f^{-}_{\lambda}<\alpha\}}\in\mathscr{F},\ \tilde{E}\cap\chi_{\{f^{-}_{\lambda}<\alpha\}}\in\mathscr{F},$$

$$\tilde{E}\cap\chi_{\{f^{-}_{\lambda}=\infty\}}\in\mathscr{F},\ \tilde{E}\cap\chi_{\{f^{+}_{\lambda}=\infty\}}\in\mathscr{F},$$

证明 类似于定理 4.1.6.

定理 8.1.5 设$\tilde{f}$是一模糊值函数，$\tilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，则

(1) 如果$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E})$，$\tilde{E}_1\subset\tilde{E}$，且 $\tilde{E}_1\in\mathscr{F}$，则$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E}_1)$；

(2) 当 $\tilde{E}_1\cap\tilde{E}_2=\phi$，$\tilde{E}=\tilde{E}_1\cup\tilde{E}_2$，$\tilde{E}_1,\tilde{E}_2\in\mathscr{F}$ 时，$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E})$的充分必要条件是$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E}_1)\cap\widetilde{FM}(\tilde{E}_2)$.

证明

(1) 类似于定理 4.1.7(1).

(2) 设$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E})$，由(1)知$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E}_1)$，且$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E}_2)$，即$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E}_1)\cap\widetilde{FM}(\tilde{E}_2)$，反之，如果$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E}_1)\cap\widetilde{FM}(\tilde{E}_2)$，则由于

对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$\alpha\in[-\infty,+\infty]$,有

$$\begin{aligned}\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}} &= (\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_2)\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}\\ &= (\widetilde{E}_1\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})\cup(\widetilde{E}_2\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}} &= (\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_2)\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}}\\ &= (\widetilde{E}_1\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})\cup(\widetilde{E}_2\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}}),\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}\in\mathscr{F}$,$\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}\in\mathscr{F}$.

即$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$.

定理 8.1.6 设$\widetilde{f},\widetilde{g}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$,则

(1) 对于任何的 $\widetilde{\alpha}\in\mathscr{F}^*(R)$,$\widetilde{\alpha}\geqslant 0$ 或 $\widetilde{\alpha}\leqslant 0$,如果 $\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f}$有意义,则 $\widetilde{\alpha}\cdot\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$;

(2) 如果$\widetilde{f}+\widetilde{g}$ 有意义,则$\widetilde{f}+\widetilde{g}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$;

(3) $\max(\widetilde{f},\widetilde{g})\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$,$\min(\widetilde{f},\widetilde{g})\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$;

(4) $\widetilde{\rho}(\widetilde{f},\widetilde{g})\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$.

证明 类似于定理 4.1.8.

定理 8.1.7 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$,如果$\sup\limits_{n\geqslant 1}\widetilde{f}_n$,$\inf\limits_{n\geqslant 1}\widetilde{f}_n$,$(\widetilde{\rho})\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\widetilde{f}_n$,$(\widetilde{\rho})\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\widetilde{f}_n$ 存在,则它们都是 $\widetilde{E}$ 上模糊可测函数.

证明 类似定理 4.1.9.

推论 8.1.1 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$,如果$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{f}_n$ 存在,则$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{f}_n\triangleq\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$.

8.2 “几乎处处”与“伪几乎处处”

定义 8.2.1 设$(X,\mathscr{F})$是模糊可测空间,μ是$\mathscr{F}$上的模糊值模糊测度,称$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间,当μ是有限模糊值模糊测度时,称$(X,\mathscr{F},\mu)$是有限模糊值模糊测度空间.

定义 8.2.2 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一个模糊值模糊测度空间,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$P$是一个命题,

(1) 如果P在$\widetilde{A}$的支集$\operatorname{supp}\widetilde{A}=\{x;\widetilde{A}(x)>0\}$上处处成立,且$\chi_{\operatorname{supp}\widetilde{A}}\in\mathscr{F}$,则称$P$在$\widetilde{A}$上处处成立;

(2) 如果存在$D\subset X$且$\chi_D\in\mathscr{F}$及$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_D)=0$使得$P$在$\widetilde{A}\cap\chi_D$上处处成立,则称$P$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立;

(3) 如果存在$E\subset X$且$\chi_E\in\mathscr{F}$及$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_E)=\mu(\widetilde{A})$,使得$P$在$\widetilde{A}\cap\chi_E$上处处成立,则称$P$在$\widetilde{A}$上伪几乎处处成立.

命题 8.2.1

(1) 如果P在$\widetilde{A}$上几乎处处成立,μ是零可减的,则P在$\widetilde{A}$上伪几乎处处成立;

(2) 如果P在$\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$上伪几乎处处成立,$\mu$是伪零可加的,则$P$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立.

证明

(1) 因为P在$\widetilde{A}$上几乎处处成立,所以存在$E\subset X$,且$\chi_E\in\mathscr{F}$及$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_E)=0$,使得$P$在$\widetilde{A}\cap\chi_E$上处处成立.又由于$\mu$是零可减的,所以

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_E^c)=\mu(\widetilde{A}),$$

故P在$\widetilde{A}$上伪几乎处处成立.

(2) 类似可证.

推论 8.2.1

(1) 如果P在$\widetilde{A}$上几乎处处成立,μ是下自连续的,则P在

$\widetilde{A}$ 上伪几乎处处成立；

(2) 如果 P 在 $\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\infty)$ 上伪几乎处处成立，μ 是伪上自连续的，则 P 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处成立.

定理 8.2.1 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一模糊值模糊测度空间，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上几乎处处收敛，则一定存在一模糊值函数 $\widetilde{f}$ 使得 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$ 且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$.

证明 因为 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上几乎处处收敛，所以，存在 $F\subset X$ 且 $\chi_F\in\mathscr{F}$ 及 $\mu(\widetilde{E}\chi_F)=0$ 使得 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{E}\cap\chi_{F^c}$ 上处处收敛. 即 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\mathrm{supp}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^c})$ 上处处收敛. 又由于 $\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，则由定理 8.1.5 (1) 知 $\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E}\cap\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap F^c})$. 我们定义模糊值函数：

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}(\widetilde{p})\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{f}_n(x), & \text{当 } x\in\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap F^c,\\ 0, & \text{当 } x\notin\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap F^c.\end{cases}$$

由推论 8.1.1 知 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E}\cap\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap F^c})$，而 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E}\cap\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap F^c})$ 是显然的，从而由定理 8.1.5(2) 知 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$.

定理 8.2.2 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一模糊值模糊测度空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上伪几乎处处收敛，则存在 $\widetilde{E}$ 上模糊可测函数 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，使得 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上伪几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$.

证明 类似定理 8.2.1.

定理 8.2.3 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一模糊值模糊测度空间，μ 是零可加的，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，$\widetilde{h}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{E}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{h}$，则一定存在 $\widetilde{E}$ 上模糊值模糊可测函数 $\widetilde{f}$，使得 $\widetilde{f}=\widetilde{h}$ 在 $\widetilde{E}$ 上几乎处处成立.

证明 由于$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛于$\widetilde{h}$，则存在$F\subset X$且$\chi_F\in\mathscr{F}$及$\mu(\widetilde{E}\cap\chi_F)=0$，使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\cap\chi_F$上处处收敛于$\widetilde{h}$，从而$\{\widetilde{f}_n\}$在$\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap F^c$上处处收敛于$\widetilde{h}$，又由于$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛，由定理8.2.1，存在$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$. 从而存在$G\subset X$且$\chi_G\in\mathscr{F}$及$\mu(\widetilde{E}\cap\chi_G)=0$使得$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\cap\chi_G$上处处收敛于$\widetilde{f}$，由此，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap G^c$上处处收敛于$\widetilde{f}$，又由于

$$\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap F^c\cap\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap G^c=\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap(F\cup G)^c,$$

所以，$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\mathrm{supp}\widetilde{E}\cap(G\cup F)^c$上处处成立. 再由$\mu$是零可加的，我们有

$$0\leqslant\mu(\widetilde{E}\cap(\chi_F\cup\chi_G))=\mu(\widetilde{E}\cap\chi_F)=0.$$

即$\mu(\widetilde{E}\cap(\chi_F\cup\chi_G))=0$，这样我们就证明了$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{E}$上几乎处处成立.

定理8.2.4 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一模糊值模糊测度空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}$且$\mu(\widetilde{E})\neq\widetilde{\infty}$，$\mu$是关于$\widetilde{E}$伪零可加的，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上伪几乎处处收敛于模糊值模糊可测函数$\widetilde{h}$，则一定存在$\widetilde{E}$上模糊值模糊可测函数$\widetilde{f}$，使得$\widetilde{f}=\widetilde{h}$在$\widetilde{E}$上伪几乎处处成立.

证明 类似定理8.2.3.

定理8.2.5 (Egoroff定理)设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，则

(1) 如果μ是零可加的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则对于任意给定$\varepsilon>0$，存在$F\subset X$且$\chi_F\in\mathscr{F}$使得$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_F)<\varepsilon$且$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}\cap\chi_F$上一致收敛于$\widetilde{f}$；

(2) 如果μ是零可减的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则对

于任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $G\subset X$ 且 $\chi_G\in\mathscr{F}$,使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_G)>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon$,且$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_G$ 上一致收敛于$\widetilde{f}$;

(3) 如果 μ 是伪零可加的,$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $F\subset X$ 且 $\chi_F\in\mathscr{F}$ 使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_F)<\varepsilon$ 且$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_F$ 上一致收敛于$\widetilde{f}$;

(4) 如果 μ 是伪零可减的,$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $G\subset X$ 且 $\chi_G\in\mathscr{F}$,使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_G)>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon$ 且$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_G$ 上一致收敛于$\widetilde{f}$.

证明 我们仅证明(1),其余类似可证.因为 μ 是零可加的,我们不妨设$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上处处收敛于$\widetilde{f}$,我们记

$$E_n^m=\bigcap_{i=n}^{\infty}\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{m}\right\},$$

则

$$E_1^m\subset E_2^m\subset\cdots,\ m=1,2,\cdots.$$

又由于$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上处处收敛于$\widetilde{f}$,所以对于每一个 $m=1,2,\cdots$,有

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{E_n^m}\supset\widetilde{A}.$$

令

$$\widetilde{F}_n^m=\widetilde{A}\cap\chi_{E_n^m},\ n,m=1,2,\cdots.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{F}_n^m=\phi,\ m=1,2,\cdots.$$

又由于 $\mu(\widetilde{A})\neq\infty$ 及 μ 的连续性,

$$(\hat{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{F}_n^m)=0,\ m=1,2,\cdots.$$

因此,对于任意给定的 $\varepsilon>0,m=1$,存在 n_1 使得

$$\mu(\widetilde{F}_{n_1}^1)<\frac{\varepsilon}{2},$$

又由于 $\widetilde{F}_n^2\searrow\phi$,我们有 $\widetilde{F}_{n_1}^1\cup\widetilde{F}_n^2\searrow\widetilde{F}_{n_1}^1$.从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{F}^1_{n_1}\cup\widetilde{F}^2_n)=\mu(\widetilde{F}^1_{n_1}).$$

这样又存在 $n_2>n_1$ 使得

$$\mu(\widetilde{F}^1_{n_1}\cup\widetilde{F}^2_{n_2})<\mu(\widetilde{F}^1_{n_1})+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{3}{4}\varepsilon,$$

我们一直进行下去,最后我们得到 $\{\widetilde{F}^m_n\}$ 的子序列 $\{\widetilde{F}^m_{n_m}\}$ 使得

$$\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{F}^m_{n_m})\leqslant\varepsilon.$$

我们记 $D=\chi_{\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E^m_{n_m}}$, $\widetilde{A}\cap\chi_D=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\widetilde{F}^m_{n_m}\in\mathscr{F}$ 则 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_D)\leqslant\varepsilon$. 下面我们证明 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$. 事实上,对于 $\varepsilon>0$. 取 $k=m_0>1/\varepsilon$,我们有

$$\widetilde{A}\cap\chi_D=\widetilde{A}\cap\chi_{\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E^m_{n_m}}\subset\chi_{\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E^m_{n_m}}.$$

所以,对于任何 $x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E^m_{n_m}$,存在 m_0 使得 $x\in E^{m_0}_{n_{m_0}}$ 即

$$x\in\bigcap_{i=m_0}^{\infty}\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{m_0}\right\},$$

也就是说,当 $i\geqslant m_0$ 时 $\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{m_0}<\varepsilon$ 对于任何 $x\in\text{supp}(\widetilde{A}\cap\chi_D)$ 成立. 这就证明了 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\chi_D$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$.

推论 8.2.2 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一模糊值模糊测度空间, $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,及 $\mu(\mathscr{F})\in A^*$, $\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$, $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,则

(1) 如果 μ 是上自连续的, $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $F\subset X$ 且 $\chi_F\in\mathscr{F}$ 使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_F)<\varepsilon$ 且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\chi_F$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$;

(2) 如果 μ 是下自连续的, $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$,则对于任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $G\subset X$ 且 $\chi_G\in\mathscr{F}$ 使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_G)>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon$ 且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\chi_G$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$;

(3) 如果 μ 是伪上自连续的, $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于

$\widetilde{f}$,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $F\subset X$ 且 $\chi_F\in\mathscr{F}$,使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_F)<\varepsilon$ 且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\chi_F^c$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$;

(4) 如果 μ 是伪下自连续的,$\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $G\subset X$ 且 $\chi_G\in\mathscr{F}$,使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_G)>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon$ 且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\chi_G$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$.

命题 8.2.2 (Egoroff 定理) 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一模糊值模糊测度空间,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,则

(1) 如果 μ 具有$(p.g.p)$性质和$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $F\subset X$ 且 $X_F\in\mathscr{F}$,使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_F)<\varepsilon$ 且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\chi_F^c$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$.

(2) 如果 μ 具有$(p.p.g.p)$性质和$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$,则对于任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $G\subset X$ 且 $\chi_G\in\mathscr{F}$,使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_G)>\mu(A)-\varepsilon$,且$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_G$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$.

证明

(1) 因为$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{f}$,存在 $D\subset X$ 且 $\chi_D\in\mathscr{F}$ 及 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_D)=0$,使得$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_D^c$ 上处处收敛于 $\widetilde{f}$. 即$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\mathrm{supp}\widetilde{A}\cap D^c$ 上处处收敛于 $\widetilde{f}$.

我们记

$$E_n^m=\bigcap_{i=n}^{\infty}\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{m}\right\},\ m=1,2,\cdots,$$

则

$$E_1^m\subset E_2^m\subset\cdots,\ m=1,2,\cdots.$$

因为$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_D^c$ 上处处收敛于 $\widetilde{f}$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{E_n^m}\supset\widetilde{A}\cap\chi_D^c,$$

即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n^m}\supset\widetilde{A}\cap\chi_{D}^c.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}(\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_n^m}^c=\phi.$$

这样，由 μ 的上连续性

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_n^m}^c)=0.$$

对于 $m\geqslant 1$，我们一定可以找到一个 $n_m\geqslant 1$ 使得

$$\mu((\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_{n_m}^m}^c)<\frac{1}{m}.$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_{n_m}^m}^c)=0.$$

再由命题 7.2.4，存在实数列 $\delta_r>0$ 和 $\left\{(\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_{n_m}^m}^c\right\}$ 的子序列 $\left\{(\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_{n_{m_i}}^{m_i}}^c\right\}$ 使得 $\delta_r\searrow 0$ 及

$$\mu(\bigcup_{i=r+1}^{\infty}((\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_{n_{m_i}}^{m_i}}^c))<\delta_r,\ r>1.$$

对于任何 $\varepsilon>0$，因为 μ 具有 $(P.G.P)$ 性质，存在 $\delta>0$ 使得当 $\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta$ 时，有

$$\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\varepsilon.$$

对于上述 $\delta>0$，我们能够找到 $r_0\geqslant 1$ 使得 $\delta_{r_0}<\delta$. 如果我们取

$$\widetilde{E}=\bigcup_{i=r_0+1}^{\infty}((\widetilde{A}\cap\chi_D)\cap\chi_{E_{n_{m_i}}^{m_i}}^c),$$

则 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{E})<\delta$，我们注意 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_D)=0<\delta$，所以

$$\mu((\widetilde{A}\cap\chi_D)\cup\widetilde{E})<\varepsilon.$$

又因为

$$(\widetilde{A}\cap\chi_D)\cup\widetilde{E}=\widetilde{A}\cap(\chi_D\cup\chi_{\bigcap\limits_{i=r_0+1}^{\infty}E_{n_{m_i}}^{m_i}}^c)=\widetilde{A}\cap\chi_{D\cup(\bigcap\limits_{i=r_0+1}^{\infty}E_{n_{m_i}}^{m_i})^c},$$

所以

$$\widetilde{A} \cap \chi_{D \cap (\bigcap_{i=r_0+1}^{\infty} E_{n_{m_i}}^{m_i})^c} = \widetilde{A} \cap \chi_D \cap \chi_{\bigcap_{i=r_0+1}^{\infty} E_{n_{m_i}}^{m_i}}$$

$$\subset \chi_{\bigcap_{i=r_0+1}^{\infty} E_{n_{m_i}}^{m_i}}.$$

现在我们只要证明$\{\widetilde{f}_n\}$在$\bigcap_{i=r_0+1}^{\infty} E_{n_{m_i}}^{m_i}$上一致收敛于$\widetilde{f}$. 事实上,对于任意给定的$\varepsilon'>0$,我们取$i_0>r_0$使得$m_{i_0+1}>\frac{1}{\varepsilon'}$,则$x\in\bigcap_{i=r_0+1}^{\infty} E_{n_{m_i}}^{m_i}$就意味着对于任何$i\geqslant r_0+1$,$x\in E_{n_{m_i}}^{m_i}$,从而

$$x \in \bigcap_{i=n_{m_{i_0+1}}}^{\infty} \left\{x; \widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x), \widetilde{f}(x)) < \frac{1}{m_{i_0}+1}\right\}.$$

这就是说,当$i\geqslant n_{m_{i_0+1}}$时,

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_i(x), \widetilde{f}(x)) < \frac{1}{m_{i_0}+1} < \varepsilon.$$

从而我们证明了$\{\widetilde{f}_n\}$在$\bigcap_{i=r_0+1}^{\infty} E_{n_{m_i}}^{m_i}$上一致收敛于$\widetilde{f}$.

(2) 类似可证.

定义 8.2.3 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一个模糊值模糊测度空间,$\widetilde{E}\in\mathscr{F}(X)$,$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$,$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$,

(1) 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$F\subset X$且$\chi_F\in\mathscr{F}$使得$\mu(\widetilde{E}\cap\chi_F)<\delta$且$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\cap\chi_F$上一致收敛于$\widetilde{f}$(分别地,$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\cap\chi_F$上一致基本的),则称$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎一致收敛于$\widetilde{f}$(分别地,$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎一致基本的);

(2) 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$G\subset X$且$\chi_G\in\mathscr{F}$,使得$\mu(\widetilde{E}\cap\chi_G)>\mu(\widetilde{E})-\varepsilon(\mu(\widetilde{E})\neq\widetilde{\infty})$且$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\cap\chi_G$上一致收敛于$\widetilde{f}$(分别地,$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}\cap\chi_G$上一致基本的),则称$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上伪几乎

一致收敛于$\tilde{f}$(分别地,$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上伪几乎一致基本的).

定理 8.2.6 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一模糊值模糊测度空间,$\tilde{E}\in\mathscr{F}$,$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\tilde{E})$,$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{E})$,

(1) 如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上几乎一致收敛于$\tilde{f}$(分别地,$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上几乎一致基本的),则$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上几乎处处敛于$\tilde{f}$(分别地,$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上几乎处处基本的);

(2) 如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}(\mu(\tilde{E})\neq\tilde{\infty})$上伪几乎一致收敛于$\tilde{f}$(分别地,$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上伪几乎一致基本的),则$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上伪几乎处处收收敛于$\tilde{f}$(分别地,$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}$上伪几乎处处基本的).

证明

(1) 设$F_n\subset X$且$\chi_{F_n}\in\mathscr{F}$及$\mu(\tilde{E}\cap\chi_{F_n})<\dfrac{1}{n}$,$n=1,2,\cdots$并使得$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}\cap\chi_{F_n}$上一致收敛于$\tilde{f}$,$n=1,2,\cdots$,令$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$,则我们有

$$\mu(\tilde{E}\cap\chi_F)\leqslant\mu(\tilde{E}\cap\chi_{F_n})<\frac{1}{n},$$

从而$\mu(\tilde{E}\cap\chi_F)=0$.下面我们证明$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}\cap\chi_F$上处处收敛于$\tilde{f}$.事实上,要证明$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}\cap\chi_F$上处处收敛于$\tilde{f}$,就是要证明$\{\tilde{f}_n\}$在$\mathrm{supp}\tilde{E}\cap F^c$上处处收敛于$\tilde{f}$,由于$\mathrm{supp}\tilde{E}\cap F^c=\mathrm{supp}\tilde{E}\cap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n)^c=\mathrm{supp}\tilde{E}\cap\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n^c$.所以,对于任何$x\in\mathrm{supp}\tilde{E}\cap F^c$,则$x\in\mathrm{supp}\tilde{E}$且$x\in F^c$,则存在$n_0\geqslant1$使得$x\in F_{n_0}$,即$x\in\mathrm{supp}\tilde{E}\cap F_{n_0}^c$,从而由$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{E}\cap\chi_{F_{n_0}}$上一致收敛于$\tilde{f}$知,$\{\tilde{f}_n\}$在$\mathrm{supp}\tilde{E}\cap F_{n_0}^c$上收敛于$\tilde{f}$,故$\{\tilde{f}_n\}$在$x\in\mathrm{supp}\tilde{E}\cap F_{n_0}^c$上收敛于$\tilde{f}$.

(2) 类似可证.

定理 8.2.7 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一模糊值模糊测度空间，$\widetilde{E}\in\mathscr{F}$且$\mu(\widetilde{E})\neq\widetilde{\infty}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{E})$，

(1) 如果μ是零可减的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎一致收敛于$\widetilde{f}$，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上伪几乎一致收敛于$\widetilde{f}$；

(2) 如果μ是伪零可加的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上伪几乎一致收敛于$\widetilde{f}$，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{E}$上几乎一致收敛于$\widetilde{f}$.

证明 由定理 8.2.5 和定理 8.2.6 立得.

推论 8.2.3 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，

(1) 如果μ是零可加或零可减的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$；

(2) 如果μ是关于$\widetilde{A}$伪零可加的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$.

证明 由定理 8.2.5 和定理 8.2.7 立得.

8.3 "依测度收敛"与"伪依测度收敛"

定义 8.3.1 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，

(1) 如果对于任意给定$\epsilon>0$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|\geq\epsilon\}})=0$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:|f^+_{n_\lambda}(x)-f^+_\lambda(x)|\geq\epsilon\}})=0,$$

对于$\lambda\in(0,1]$一致成立，则称$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度收敛

于$\widetilde{f}$；

(2) 如果对于任意给定 $\varepsilon>0$,有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|<\varepsilon\}})=\mu_\lambda^-(\widetilde{A})$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|<\varepsilon\}})=\mu_\lambda^+(\widetilde{A}),$$

对于 $\lambda\in(0,1]$一致成立,则称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$;

(3) 如果对于任意给定 $\varepsilon>0$,有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\geq\varepsilon\}})=0,$$

则称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$;

(4) 如果对于任意给定 $\varepsilon>0$,有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon\}})=\mu(\widetilde{A}),$$

则称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$.

命题 8.3.1 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$,$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$.

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$;

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$.

证明 类似命题 4.2.2.

命题 8.3.2 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,

(1) 如果 μ 是下自连续的,$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上依模糊值模糊测度(分

别地,强依模糊值模糊测度)μ收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪依模糊值模糊测度(分别地,强伪依模糊值模糊测度)μ收敛于$\widetilde{f}$;

(2) 如果μ是关于$\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$伪上自连续的,$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪依模糊值模糊测度(分别地,强伪依模糊值模糊测度)μ收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度(分别地,强依模糊值模糊测度)μ收敛于$\widetilde{f}$.

证明 显然.

定理 8.3.1 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎一致收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$;

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪几乎一致收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强伪依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$.

证明

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎一致收敛于$\widetilde{f}$,则对于任意给定$\varepsilon>0$和$\delta>0$,存在$F\subset X$且$\chi_F\in\mathscr{F}$使得$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_F)<\delta$,且$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}\cap\chi_{F^c}$上一致收敛于$\widetilde{f}$,所以,对上述$\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n\geqslant N$时,对于任何$x\in\operatorname{supp}\widetilde{A}\cap F^c$一致成立

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon.$$

从而$\operatorname{supp}\widetilde{A}\cap F^c\subset\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon\}$,故

$$\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\varepsilon\}\subset(\operatorname{supp}\widetilde{A})^c\cup F.$$

即当$n\geqslant N$时,

$$\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\varepsilon\}}\subset\chi_{(\operatorname{supp}\widetilde{A})^c\cup F}.$$

从而

$$\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\varepsilon\}}\subset\widetilde{A}\cap\chi_{(\mathrm{supp}\widetilde{A})^c\cup F}.$$

下面我们证明 $\widetilde{A}\cap\chi_{(\mathrm{supp}\widetilde{A})^c\cup F}=\widetilde{A}\cap\chi_F$. 事实上，因为 $\widetilde{A}\cap\chi_{(\mathrm{supp}\widetilde{A})^c}=\varnothing$，所以，$\widetilde{A}\cap\chi_{(\mathrm{supp}\widetilde{A})^c\cup F}=\widetilde{A}\cap\chi_F$. 故

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\varepsilon\}})\leqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_F)<\delta.$$

即 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$.

(2) 如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎一致收敛于 $\widetilde{f}$，则对于任意给定 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在 $G\subset X$ 且 $\chi_G\in\mathscr{F}$，使得 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_G)>\mu(\widetilde{A})-\delta$，且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}\cap\chi_G$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$. 所以，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，对于任何 $x\in\mathrm{supp}\widetilde{A}\cap G$ 一致成立

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon.$$

从而 $\mathrm{supp}\widetilde{A}\cap G\subset\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon\}$，故

$$\widetilde{A}\cap\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{A}\cap G}\subset\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon\}}\subset\widetilde{A}.$$

下面我们要证明

$$\widetilde{A}\cap\chi_G\subset\widetilde{A}\cap\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{A}\cap G}.$$

事实上，因为 $\widetilde{A}\subset\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{A}}$，所以

$$\widetilde{A}\cap\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{A}\cap G}=\widetilde{A}\cap\chi_{\mathrm{supp}\widetilde{A}}\cap\chi_G=\widetilde{A}\cap\chi_G.$$

从而

$$\begin{aligned}\mu(\widetilde{A})-\varepsilon&<\mu(\widetilde{A}\cap\chi_G)\\&\leqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon\}})\leqslant\mu(\widetilde{A}),\end{aligned}$$

故 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$.

定义 8.3.2 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，

(1) 如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_{m_\lambda}^-(x)|\geqslant\varepsilon\}})=0$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x\mid|f_{n_\lambda}^{+}(x)-f_{m_\lambda}^{+}(x)|\geqslant\varepsilon\}})=0,$$

对于 $\lambda\in(0,1]$一致成立，则称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上依模糊值模糊测度 μ 基本的；

(2) 如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x\mid|f_{n_\lambda}^{-}(x)-f_{m_\lambda}^{-}(x)|<\varepsilon\}})=\mu_\lambda^{-}(\widetilde{A})$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x\mid|f_{n_\lambda}^{+}(x)-f_{m_\lambda}^{+}(x)|<\varepsilon\}})=\mu_\lambda^{+}(\widetilde{A}),$$

对于 $\lambda\in(0,1]$一致成立，则称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪依模糊值模糊测度 μ 基本的；

(3) 如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\bar{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))\nless\varepsilon\}})=0,$$

则称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 基本的；

(4) 如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\bar{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))<\varepsilon\}})=\mu(\widetilde{A}),$$

则称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 基本的.

命题 8.3.3 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 基本的，则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上依模糊值模糊测度 μ 基本的；

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 基本的，则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪依模糊值模糊测度 μ 基本的.

证明 类似命题 4.2.2.

命题 8.3.4 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，

(1) 如果μ是下自连续的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度(分别地，强依模糊值模糊测度)μ基本的，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度(分别地，强伪依模糊值模糊测度)μ基本的；

(2) 如果μ是关于$\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$伪上自连续的，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪依模糊值模糊测度(分别地，强伪依模糊值模糊测度)μ基本的，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度(分别地，强依模糊值模糊测度)μ基本的.

证明 显然.

定理 8.3.2 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎一致基本的，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ基本的；

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪几乎一致基本的，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强伪依模糊值模糊测度μ基本的.

证明 类似定理 8.3.2.

定理 8.3.3 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\widetilde{g}_n\}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，$\widetilde{g}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，如果$\mu$具有$(p.g.p)$性质，则

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度(分别地，依模糊值模糊测度)μ收敛于$\widetilde{f}$，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度(分别地，依模糊值模糊测度)μ基本的；

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度(分别地，依模糊值模糊测度)μ收敛于$\widetilde{f}$和$\widetilde{g}$，则$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立；

(3) 如果$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度(分别地,依模糊值模糊测度)μ 收敛于$\tilde{f}$,$\{\tilde{g}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度(分别地,依模糊值模糊测度)μ 收敛于 $\tilde{g}$,则对于任何实数 $\alpha\geqslant 0$ 和 $\beta\geqslant 0$,$\{\alpha\tilde{f}_n+\beta\tilde{g}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度(分别地,依模糊值模糊测度)μ 收敛于 $\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g}$.

证明

(1) 因为 μ 具有($p.g.p$)性质,所以,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $\mu(\tilde{E})\vee\mu(\tilde{F})<\delta$ 时,有 $\mu(\tilde{E}\cup\tilde{F})<\varepsilon$. 对于上述 $\delta>0$,因为$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\tilde{f}$,所以存在 $N>0$,当 $n,m\geqslant N$ 时,有

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}})<\delta$$

及

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_m(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}})<\delta.$$

我们取 $\tilde{E}=\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}}$,$\tilde{F}=\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_m(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}}$. 则 $\mu(\tilde{E})\vee\mu(\tilde{F})<\delta$,再由 μ 的单调性及 μ 具有($p.g.p$)性质,我们有

$$\begin{aligned}&\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_m(x))\nless 2\varepsilon\}})\\ &\leqslant\mu((\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}})\cup(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_m(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}}))\\ &=\mu(\tilde{E}\cup\tilde{F})<\varepsilon.\end{aligned}$$

即$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 基本的.

(2) 因为对于任意给定 $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))\nless\varepsilon\}}\subset&\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\}}\\ &\cup\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\}}.\end{aligned}$$

及 μ 具有($p.g.p$)性质,对于任意给定 $\varepsilon'>0$ 存在 $\delta>0$ 使得当 $\mu(\tilde{E})\vee\mu(\tilde{F})<\delta$ 时,$\mu(\tilde{E}\cup\tilde{F})<\varepsilon'$. 由于$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模

糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$和$\widetilde{g}$,所以,对上述$\delta>0$,存在$N>0$,当$n\geqslant N$时

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\varepsilon/2\}})<\delta$$

及

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\right\}})<\delta.$$

我们取
$$\widetilde{E}=\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\varepsilon/2\}},$$
$$\widetilde{F}=\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\right\}}$$

则$\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta$. 再由$\mu$的单调性及$\mu$的$(p.g.p)$性质,我们有

$$\begin{aligned}&\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x))\nless\varepsilon\}})\\ \leqslant&\mu((\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\right\}})\\ &\cup(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2}\right\}}))\\ =&\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\varepsilon'\end{aligned}$$

再由ε'的任意性知

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x))\nless\varepsilon\}})=0.$$

从而根据μ的下连续性

$$\begin{aligned}0&\leqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x))>0\}})\\ &\leqslant\mu(\widetilde{A}\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x))\nless\frac{1}{n}\right\}})\\ &=(\rho)\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x))\nless\frac{1}{n}\right\}})=0.\end{aligned}$$

故

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x))\neq0\}})=0,$$

即$\widetilde{f}=\widetilde{g}$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立.

(3) 由于对于任意给定的$\varepsilon>0,\alpha>0,\beta>0$,

$$\{x;\widetilde{\rho}(\alpha\widetilde{f}_n(x)+\beta\widetilde{g}_n(x),\alpha\widetilde{f}(x)+\beta\widetilde{g}(x))\nless\varepsilon\}$$
$$\subset\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))\nless\frac{1}{2\alpha}\varepsilon\right\}$$

$$\bigcup\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x))\nless\frac{1}{2\beta}\varepsilon\right\},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\alpha\tilde{f}_n(x)+\beta\tilde{g}_n(x),\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{g}(x))\nless\varepsilon\}}\\
&\quad\subset(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right\}})\\
&\quad\cup(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\beta}\right\}}).
\end{aligned}$$

因为 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质，对于任意给定 $\varepsilon'>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta$ 时，$\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\varepsilon'$. 由于 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$ 和 $\{\tilde{g}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{g}$，所以，对于上述 $\delta>0$，存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时成立

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right\}})<\delta$$

和

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\beta}\right\}})<\delta.$$

我们取 $\widetilde{E}=\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right\}}$,

$$\widetilde{F}=\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\beta}\right\}},$$

则 $\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta$，再由 μ 的单调性及 μ 的 $(p.g.p)$ 性质，我们有

$$\begin{aligned}
&\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\alpha\tilde{f}_n(x)+\beta\tilde{g}_n(x),\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{g}(x))\nless\varepsilon\}})\\
&\leqslant\mu((\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right\}})\cup(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x))\nless\frac{\varepsilon}{2\beta}\right\}}))\\
&=\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\varepsilon'
\end{aligned}$$

故 $\{\alpha\tilde{f}_n+\beta\tilde{g}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g}$.

定理 8.3.4 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\tilde{\infty}$，$\{\tilde{f}_n\}$，$\{\tilde{g}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，$\tilde{f},\tilde{g}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，如果 μ 关于 $\widetilde{A}$ 具有 $(p.p.g.p)$ 性质，则

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度(分别地,伪依模糊值模糊测度)μ 收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度(分别地,伪依模糊值模糊测度)μ 基本的;

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度(分别地,伪依模糊值模糊测度)μ 收敛于$\widetilde{f}$和 $\widetilde{g}$,则$\widetilde{f}=\widetilde{g}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处成立;

(3) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$和$\{\widetilde{g}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度(分别地,伪依模糊值模糊测度)μ 收敛于$\widetilde{f}$和 $\widetilde{g}$,则对于任何实数 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$,$\{\alpha\widetilde{f}_n+\beta\widetilde{g}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 强伪依模糊值模糊测度(分别地,伪依模糊值模糊测度)μ 收敛于 $\alpha\widetilde{f}+\beta\widetilde{g}$.

证明

(1) 因为对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$

$$\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))<\varepsilon\}\supset\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cap\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_m(x),\widetilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

所以

$$\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))<\varepsilon\}}\supset(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})\cap(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_m(x),\widetilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}}).$$

又由于$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$,所以存在 $n_0\geqslant1$,当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon/2\}})>\mu(\widetilde{A})-\delta,$$

从而由 μ 的单调性及定理 7.3.8(1)我们有

$$\mu(\widetilde{A})\geqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))<\varepsilon\}})\geqslant\mu(\widetilde{A})-\varepsilon$$

即

$$(\widetilde{\rho})\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))<\varepsilon\}})=\mu(\widetilde{A}),$$

也就是说，$\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上是强伪依模糊值模糊测度 μ 基本的.

(2) 因为对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，

$$\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))<\varepsilon\}\supset\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cap\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{g}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

所以

$$\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))<\varepsilon\}}\supset(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})\cap(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{g}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}}).$$

又由于 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$，所以存在 $n_0\geqslant1$，当 $n\geqslant n_0$

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon/2\}})>\mu(\tilde{A})-\delta$$

及

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{g}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})>\mu(\tilde{A})-\delta,$$

从而由 μ 的单调性和定理 7.3.8(1)，我们有

$$\mu(\tilde{A})\leqslant\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))<\varepsilon\}})\leqslant\mu(\tilde{A}),$$

即

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))<\varepsilon\}})=\mu(\tilde{A}).$$

再根据 μ 的上连续性，

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))=0\}})&=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))<\frac{1}{n}\right\}})\\&=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))<\frac{1}{n}\right\}})\\&=\mu(\tilde{A}).\end{aligned}$$

即 $\tilde{f}=\tilde{g}$ 在 $\tilde{A}$ 上伪几乎处处成立.

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon>0,\alpha>0,\beta>0$，由于

$$\{x;\tilde{\rho}(\alpha\tilde{f}_n(x)+\beta\tilde{g}_n(x),\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{g}(x))<\varepsilon\}$$

$$\supset \left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x)) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}\right\}$$

$$\cap \left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x)) < \frac{\varepsilon}{2\beta}\right\}$$

所以

$$\tilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\alpha\tilde{f}_n(x)+\beta\tilde{g}_n(x),\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{g}(x))<\varepsilon\}}$$

$$\supset(\tilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right\}})$$

$$\cap(\tilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x))<\frac{\varepsilon}{2\beta}\right\}})$$

又由于$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\tilde{f}$和$\{\tilde{g}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{g}$，所以存在 $\delta>0$，及 $n_0\geqslant1$，当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\mu(\tilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2\alpha}\right\}}) > \mu(\tilde{A}) - \delta$$

及

$$\mu(\tilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{g}_n(x),\tilde{g}(x))<\frac{\varepsilon}{2\beta}\right\}}) > \mu(\tilde{A}) - \delta,$$

从而由 μ 的单调性和定理 7.3.8(1)，我们有

$$\mu(\tilde{A}) \leqslant \mu(\tilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\alpha\tilde{f}_n(x)+\beta\tilde{g}_n(x),\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{g}(x))<\varepsilon\}}) \leqslant \mu(\tilde{A}),$$

故

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\alpha\tilde{f}_n(x)+\beta\tilde{g}_n(x),\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{g}(x))<\varepsilon\}}) = \mu(\tilde{A})$$

即$\{\alpha\tilde{f}_n+\beta\tilde{g}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g}$.

定理 8.3.5 (Riesz 定理)设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\tilde{A}\in\mathscr{F}$，$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\tilde{A})$，$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{A})$，

(1) 如果 μ 具有(SA)性质，$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\tilde{f}$，则存在$\{\tilde{f}_n\}$的子序列$\{\tilde{f}_{n_i}\}$使得$\{\tilde{f}_{n_i}\}$在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于$\tilde{f}$；

(2) 如果 μ 具有(SB)性质，$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度

μ 收敛于$\widetilde{f}$，则存在$\{\widetilde{f}_n\}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_i}\}$使得$\{\widetilde{f}_{n_i}\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$；

(3) 如果 μ 具有(PSA)性质，$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$，则存在$\{\widetilde{f}_n\}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_i}\}$使得$\{\widetilde{f}_{n_i}\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$；

(4) 如果 μ 具有(PSB)性质，$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$，则存在$\{\widetilde{f}_n\}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_i}\}$使得$\{\widetilde{f}_{n_i}\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$.

证明

(1) 因为$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$，所以，对于任何 $k=1,2,\cdots$，存在 n_k 使得

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_k}(x),\widetilde{f}(x))\not<1/k\}})<1/k.$$

不失一般性，我们假定 $n_{k+1}\geqslant n_k$，$k=1,2,\cdots$. 如果我们记

$$E_k=\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_k}(x),\widetilde{f}(x))\not<\frac{1}{k}\right\},$$

则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{E_k})=0.$$

因为 μ 具有(SA)性质，存在$\{E_k\}$的子序列$\{E_{k_i}\}$使得

$$\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}(\widetilde{A}\cap\chi_{E_{k_i}}))=0.$$

即

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}E_{k_i}})=0.$$

下面我们证明$\{\widetilde{f}_{n_{k_i}}\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_{\overline{\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}E_{k_i}}}$ 上处处收敛于$\widetilde{f}$. 事实上，对于任何 $x\notin\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}E_{k_i}$，存在 $j(x)\geqslant 1$，使得 $x\notin\bigcup_{i=j(x)}^{\infty}E_{k_i}$. 从而对于

任何 $i \geqslant j(x)$，$x \in E_{k_i}$. 即

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k_i}}(x), \tilde{f}(x)) < 1/k_i.$$

因此，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $i_0 \geqslant 1$ 使得 $1/k_{i_0} < \varepsilon$，且当 $i \geqslant i_0 \vee j(x)$ 时

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k_i}}(x), \tilde{f}(x)) < 1/k_i \leqslant 1/k_{i_0} < \varepsilon.$$

换句话说，$x \in \{x; \tilde{f}_{n_{k_i}}(x) \to \tilde{f}(x)\}$. 故

$$\tilde{A} \cap \chi_{\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{k_i}} \subset \chi_{\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{k_i}} \subset \chi_{\{x; \tilde{f}_{n_{k_i}}(x) \to \tilde{f}(x)\}}.$$

这样我们就证明了 $\{\tilde{f}_n\}$ 的子序列 $\{\tilde{f}_{n_{k_i}}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$.

(2) 因为 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，由(1)的证明可知

$$(\tilde{\rho}) \lim_{k \to \infty} \mu(\tilde{A} \cap \chi_{E_k}) = 0,$$

其中 $E_k = \{x; \tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x), \tilde{f}(x)) \nless 1/k\}$. 由于 μ 具有 (SB) 性质，存在 $\{E_k\}$ 的子序列 $\{E_{k_i}\}$ 使得

$$\mu(\tilde{A} \cap (\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} \chi_{E_{k_i}})^c) = \mu(\tilde{A}),$$

即

$$\mu(\tilde{A} \cap \chi_{\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{k_i}}) = \mu(\tilde{A}).$$

再由(1)的证明可知 $\{\tilde{f}_n\}$ 的子序列 $\{\tilde{f}_{n_{k_i}}\}$ 在 $\tilde{A} \cap \chi_{\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_{k_i}}$ 上处处收敛于 $\tilde{f}$，即 $\{\tilde{f}_{n_{k_i}}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于 $\tilde{f}$.

(3) 因为 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，所以，对于任何 $k = 1, 2, \cdots$，存在 $n_k \geqslant 1$ 使得

$$\mu(\tilde{A} \cap \chi_{\{x; \tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x), \tilde{f}(x)) < 1/k\}}) > \mu(\tilde{A}) - \frac{1}{k},$$

不失一般性,我们假定 $n_{k+1}>n_k, k=1,2,\cdots$. 如果我们记

$$E'_k=\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{k}\right\}.$$

则

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{E'_k})=\mu(\tilde{A}).$$

因为 μ 具有(PSA)性质,存在$\{E'_k\}$的子序列$\{E'_{k_i}\}$使得

$$\mu(\tilde{A}\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\chi_{E'_{k_i}})')=0,$$

即

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi'_{\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E'_{k_i}})=0.$$

下面我们证明$\{\tilde{f}_{n_{k_i}}\}$在 $\tilde{A}\cap\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E'_{k_i}}$ 上处处收敛于$\tilde{f}$. 事实上,对于任何 $x\in\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E'_{k_i}$,存在 $j(x)\geqslant1$,使得 $x\in\bigcap_{i=j(x)}^{\infty}E'_{k_i}$,从而对于任何 $i\geqslant j(x)$, $x\in E'_{k_i}$,即

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k_i}}(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{k_i}.$$

因此,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $i_0\geqslant1$ 使得 $1/k_{i_0}<\varepsilon$,且当 $i\geqslant i_0\vee j(x)$时

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k_i}}(x),\tilde{f}(x))<\frac{1}{k_i}\leqslant\frac{1}{k_{i_0}}<\varepsilon.$$

换句话说,$x\in\{x;\tilde{f}_{n_{k_i}}(x)\to\tilde{f}(x)\}$,故

$$\tilde{A}\cap\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E'_{k_i}}\subset\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E'_{k_i}}\subset\chi_{\{x;\tilde{f}_{n_{k_i}}(x)\to\tilde{f}(x)\}},$$

这样,我们就证明了$\{\tilde{f}_n\}$的子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_i}}\}$在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$.

(4) 因为$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\tilde{f}$. 由(3)的证明可知

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{E'_k})=\mu(\widetilde{A}),$$

其中 $E'_{k_i}=\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k_i}}(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{k}\right\}$. 由于 μ 具有(PSB)性质,存在$\{E'_k\}$的子序列$\{E'_{k_i}\}$使得

$$\mu(\widetilde{A}\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}\chi_{E'_{k_i}}))=\mu(\widetilde{A}),$$

即

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E'_{k_i}})=\mu(\widetilde{A}).$$

再由(3)的证明可知$\{\widetilde{f}_n\}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_i}}\}$在 $\widetilde{A}\cap\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{i=j}^{\infty}E'_{k_i}}$ 上处处收敛于$\widetilde{f}$,即$\{\widetilde{f}_{n_{k_i}}\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$.

定理 8.3.6 (Lebesgue 定理) 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,

(1) 如果 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$;

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$;

(3) 如果 μ 是零可减的,$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$;

(4) 如果 μ 是关于 $\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$伪零可加的,$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$,则$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$.

证明

(1) 根据模糊数序列$\{\widetilde{f}_n(x)\}$收敛于$\{\widetilde{f}(x)\}$的定义,$\{\widetilde{f}_n(x)\}$不收敛于$\widetilde{f}(x)$的充分必要条件是,存在 $\varepsilon>0$,使得对于 n 的无穷

多个值有 $x \in E_n(\varepsilon)=\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}$，换句话说，如果 D 是使得$\{\tilde{f}_n(x)\}$不收敛于$\tilde{f}(x)$的点 x 所成的集合，则

$$D=\bigcup_{\varepsilon>0}\limsup_{n\to\infty}{}_nE_n(\varepsilon).$$

因此，由$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于$\tilde{f}$，我们可以推出

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_D)=0.$$

另一方面，由于 μ 的连续性及单调性，

$$\begin{aligned}0&=\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\limsup_{n\to\infty}{}_nE_n(\varepsilon)})=\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m(\varepsilon)})\\&=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m(\varepsilon)})\\&\geqslant(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{E_n(\varepsilon)})\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\nless\varepsilon\}})=0,$$

即$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\tilde{f}$.

(2) 因为$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\tilde{f}$，存在 $D\subset X$ 且 $\chi_D\in\mathscr{F}$ 使得 $\mu(\tilde{A}\cap\chi_D)=\mu(\tilde{A})$且$\{\tilde{f}_n\}$在 $\tilde{A}\cap\chi_D$ 上处处收敛于$\tilde{f}$. 从而

$$\tilde{A}\cap\chi_D\subset\chi_E,$$

其中 $E=\{x;\tilde{f}_n(x)\to\tilde{f}(x)\}$. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$x\in E$，存在 $N(x)>0$ 使得当 $n\geqslant N(x)$时，

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon.$$

我们记

$$E_n=\bigcap_{i=n}^{\infty}\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_i(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon\},$$

则 $E_1\subset E_2\subset\cdots$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}(E\cap E_n)=E$，故

$$\lim_{n\to\infty}(\tilde{A}\cap\chi_{D\cap E\cap E_n})=\bigcup_{n=1}^{\infty}((\tilde{A}\cap\chi_D)\cap(\chi_{E\cap E_n}))$$

$$=\widetilde{A}\cap\chi_D\cap\chi_E$$
$$=\widetilde{A}\cap\chi_D.$$

又因为

$$\widetilde{A}\cap\chi_{D\cap E\cap E_n}\subset\widetilde{A}\cap\chi_{E_n}\subset\widetilde{A},$$

所以,由 μ 的连续性及单调性,

$$\mu(\widetilde{A})\geqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{E_n})$$
$$\geqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{D\cap E\cap E_n})$$
$$=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_D)=\mu(\widetilde{A}).$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon\}})=\mu(\widetilde{A}),$$

即 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$.

(3)和(4)分别由(1)和(2)利用推论 8.2.3 立得.

推论 8.3.1 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是模糊值模糊测度空间,$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$,$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,$\widetilde{h}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,

(1) 如果 μ 是零可加的,$\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{h}$,则一定存在 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,使得 $\widetilde{f}=\widetilde{h}$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处成立,并且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$;

(2) 如果 μ 是关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加,$\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于 $\widetilde{h}$,则一定存在 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,使得 $\widetilde{f}=\widetilde{h}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处成立,并且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$;

(3) 如果 μ 是零可减和关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加的,$\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\widetilde{h}$,则一定存在 $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$,使得 $\widetilde{f}=\widetilde{h}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处成立,并且 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$;

(4) 如果 μ 是零可加的和关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加的,$\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪

几乎处处收敛于$\widetilde{h}$，则一定存在$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，使得$\widetilde{f}=\widetilde{h}$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立，并且$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\widetilde{f}$.

证明

(1) 根据假设，由定理 8.2.3 知，一定存在$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，使得$\widetilde{f}=\widetilde{h}$在$\widetilde{A}$上几乎处处成立，并且$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，再由定理 8.3.6(1)知$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\widetilde{f}$.

(2) 由定理 8.2.4 及定理 8.3.6(2)类似(1)可证.

(3)，(4)可以利用命题 8.2.1 分别由(2)和(1)得证.

定理 8.3.7 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\mu(\mathscr{F})\in A^*$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$，则

(1) 如果μ具有(SA)性质，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$的充分必要条件是，对于$\{\widetilde{f}_n\}$的任一子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$都可以从中再找到一个子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$；

(2) 如果μ是关于$\widetilde{A}$伪零可加的和具有(SB)性质，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$的充分必要条件是，$\{\widetilde{f}_n\}$的任一子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$都可以从中找到一个子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\widetilde{A}$上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$；

(3) 如果μ是零可减且具有(PSA)性质，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强伪依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$的充分必要条件是，$\{\widetilde{f}_n\}$的任一子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$都可以从中找到一个子序列$\{\widetilde{f}'_{n_{k_\nu}}\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$；

(4) 如果μ具有(PSB)性质，则$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上强伪依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$的充分必要条件是，$\{\widetilde{f}_n\}$的任一子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$都

可以从中找到一个子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$上伪几乎处处收敛于$\tilde{f}$.

证明

(1) 必要性. 如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\tilde{f}$,则$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\tilde{f}$,对$\{\tilde{f}_{n_k}\}$和$\tilde{f}$应用定理 8.3.5(1),一定存在子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$上几乎处处收敛于$\tilde{f}$.

充分性. 设$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$都有子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$上几乎处处收敛于$\tilde{f}$. 如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上不强依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\tilde{f}$,则存在$\varepsilon_0>0$,使得$\{\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})\}$不收敛于零,因此

$$(\tilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})>0,$$

再由命题 2.4.1,存在$\{\tilde{f}_n\}$的子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$使得

$$\begin{aligned}&(\tilde{\rho})\ \lim_{k\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})\\&=(\tilde{\rho})\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})>0,\end{aligned}$$

这样,$\{\tilde{f}_{n_k}\}$中不可能存在在$\tilde{A}$上几乎处处收敛于$\tilde{f}$的子序列. 事实上,如果有子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$上几乎处处收敛于$\tilde{f}$,则根据定理 8.3.6(1),

$$(\tilde{\rho})\ \lim_{\nu\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k_\nu}}(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})=0.$$

产生矛盾! 从而证明了充分性.

(2) 必要性. 如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\tilde{f}$,则$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\tilde{f}$,对于$\{\tilde{f}_{n_k}\}$和$\tilde{f}$应用定理 8.3.5(2),一定存在子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$

上伪几乎处处收敛于$\tilde{f}$.

充分性. 设$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$都有子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$上伪几乎处处收敛于$\tilde{f}$,如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上不强依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\tilde{f}$,则存在$\varepsilon_0>0$,使得$\{\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})\}$不收敛于零,因此

$$(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})>0,$$

再由命题 2.4.1 知,存在$\{\tilde{f}_n\}$的子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$使得

$$\begin{aligned}&(\tilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})\\&=(\tilde{\rho})\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})>0,\end{aligned}$$

这样,$\{\tilde{f}_{n_k}\}$中不可能存在在$\tilde{A}$上伪几乎处处收敛于$\tilde{f}$的子序列,事实上,如果有$\{\tilde{f}_{n_k}\}$的子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$上伪几乎处处收敛于$\tilde{f}$,根据定理 8.3.6(4),

$$(\tilde{\rho})\lim_{\nu\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k_\nu}}(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon_0\}})=0.$$

产生矛盾! 从而证明了充分性.

(3) 必要性. 类似于(1)的必要性证明.

充分性. 设$\{\tilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$都有子序列$\{\tilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在$\tilde{A}$上几乎处处收敛于$\tilde{f}$,如果$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上不强伪依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\tilde{f}$,则存在$\varepsilon_0>0$,使得$\{\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon_0\}})\}$不收敛于$\mu(\tilde{A})$. 因此,

$$(\tilde{\rho})\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon_0\}})<\mu(\tilde{A}).$$

再由命题 2.4.1,存在$\{\tilde{f}_n\}$的子序列$\{\tilde{f}_{n_k}\}$使得

$$(\tilde{\rho})\lim_{k\to\infty}\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon_0\}})$$

$$= (\widetilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon_0\}}) < \mu(\widetilde{A}).$$

这样，$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$中不可能存在在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$的子序列. 事实上，如果有子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则根据定理 8.3.6(3)，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{\nu\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k_\nu}}(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon_0\}}) = \mu(\widetilde{A}),$$

产生矛盾！从而证明充分性.

(4) 必要性. 类似于(1)的必要性证明.

充分性. 设$\{\widetilde{f}_n\}$的任何子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$都有子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$. 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上不强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得$\{\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon_0\}})\}$不收敛于 $\mu(\widetilde{A})$. 因此，

$$(\widetilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon_0\}}) < \mu(\widetilde{A}).$$

再由命题 2.4.1，存在$\{\widetilde{f}_n\}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$使得

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{k\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_k}(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon_0\}})$$
$$= (\widetilde{\rho}) \varliminf_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon_0\}}) < \mu(\widetilde{A}).$$

这样，$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$中不可能存在在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$的子序列. 事实上，如果有子序列$\{\widetilde{f}_{n_{k_\nu}}\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，则根据定理 8.3.6(2)

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{\nu\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k_\nu}}(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon_0\}}) = \mu(\widetilde{A}),$$

产生矛盾！从而证明充分性.

定理 8.3.8 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$且$\{\widetilde{f}(x)\}\in A^*$，$x\in X$ 则

(1) 如果 μ 具有$(p.g.p)$性质，$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上是强依模糊值模

糊测度 μ 基本的，则存在$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$及$\{\widetilde{f}_n\}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$使得$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$在 $\widetilde{A}$ 上是强依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$；

(2) 如果 μ 具有$(p.\ p.\ g.\ p)$性质，$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 是强伪依模糊值模糊测度 μ 基本的，则存在$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$及$\{\widetilde{f}_n\}$的子序列$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$，使得$\{\widetilde{f}_{n_k}\}$在 $\widetilde{A}$ 上是强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$.

证明

(1) 因为 μ 具有$(p.\ g.\ p)$性质，对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在 $\delta_1\in(0,\frac{1}{2})$ 使得当 $\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta_1$ 时，

$$\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\frac{1}{2}.$$

对于上述 $\delta_1>0$，存在 $\delta_2\in(0,\delta_1\wedge\frac{1}{2^2})$使得当 $\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta_2$ 时，

$$\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})<\delta_1$$

及存在 $n_1\geqslant1$，使得当 $n\geqslant n_1$ 时，

$$\mu(\widetilde{A}\cap X_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_1}(x))\not<\frac{1}{2}\right\}})<\delta_1.$$

我们取 $n_2>n_1$，由$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上是强依模糊值模糊测度基本的，则当 $n\geqslant n_2$ 时，

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))\not<\frac{1}{2^2}\right\}})<\delta_2.$$

因此，我们有

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_1}(x))\not<\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))\not<\frac{1}{2^2}\right\}})$$

$$=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_1}(x))\not<\frac{1}{2}\right\}})\cup(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))\not<\frac{1}{2^2}\right\}})$$

$$<\frac{1}{2}.$$

对于上述 $\delta_2>0$，存在 $\delta_3\in(0,\delta_2\wedge\frac{1}{2^3})$使得当 $\mu(\widetilde{E})\vee\mu(\widetilde{F})<\delta_3$ 时

$$\mu(\widetilde{E} \cup \widetilde{F}) < \delta_2.$$

我们取 $n_3 > n_2$，再由 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上是强依模糊值模糊测度 μ 基本的，当 $n \geqslant n_3$ 时，

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_3}(x)) \nless \frac{1}{2^3}\right\}}) < \delta_3.$$

因此

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x)) \nless \frac{1}{2^2}\right\} \cup \left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_3}(x)) \nless \frac{1}{2^3}\right\}})$$
$$= \mu((\widetilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_1}(x),\widetilde{f}_{n_2}(x)) \nless \frac{1}{2^2}\right\}}) \cup (\widetilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_3}(x)) \nless \frac{1}{2^3}\right\}}))$$
$$< \delta_1,$$

及

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_3}(x),\widetilde{f}_{n_2}(x)) \nless \frac{1}{2^2}\right\} \cup \left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_2}(x),\widetilde{f}_{n_1}(x)) \nless \frac{1}{2}\right\}}) < \frac{1}{2}.$$

我们重复上述过程，我们能够得到 $n_{k+1} > n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1 \geqslant 1$ 及 $\delta_{k+1} < \delta_k < \delta_{k-1} \wedge \frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$，使得对于任何 $r \geqslant 1$，

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\bigcup_{i=k}^{r+1}\left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{i+1}}(x),\widetilde{f}_{n_i}(x)) \nless \frac{1}{2^i}\right\}}) < \delta_{k-1} \quad (k = 2,3,\cdots,r+1).$$

如果我们记

$$E_k = \left\{x;\tilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k+1}}(x),\widetilde{f}_{n_k}(x)) \nless \frac{1}{2^k}\right\},$$

及

$$B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} E_k \quad 和 \quad E = \lim\sup_k E_k = \bigcap_{k=2}^{\infty} B_k,$$

则 $B_k \searrow E$ 及

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{B_k}) = \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i}) \leqslant \delta_{k-1},\ (k \geqslant 2).$$

再由 μ 的连续性，

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_E) = 0.$$

对于任意给定的 $\epsilon > 0$ 及 $\sigma > 0$，存在 $k_\epsilon > 2$ 及 $k_\sigma > 2$ 使得

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{B_{k_\epsilon}}) < \epsilon,$$

及

$$\frac{1}{2^{k-1}} < \sigma \quad (k \geqslant k_\sigma).$$

如果 $x \in E^c$，存在 $k_1 \geqslant k_\sigma$，使得

$$x_0 \notin \bigcup_{i=k_1}^{\infty} \left\{x; \tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{i+1}}(x), \tilde{f}_{n_i}(x)) \nless \frac{1}{2^i}\right\},$$

从而对于任何 $k \geqslant k_1$，

$$x_0 \notin \left\{x; \tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k+1}}(x), \tilde{f}_{n_k}(x)) \nless \frac{1}{2^k}\right\}.$$

即

$$x_0 \in \left\{x; \tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k+1}}(x), \tilde{f}_{n_k}(x)) < \frac{1}{2^k}\right\}.$$

故对任何 $r \geqslant 1, k \geqslant k_1$，我们有

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k+r}}(x_0), \tilde{f}_{n_k}(x_0)) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k+i}}(x_0), \tilde{f}_{n_{k+i-1}}(x_0)) < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

即 $\{\tilde{f}_{n_k}(x_0)\}$ 是一个模糊数的基本列. 由定理 2.4.4 $\{\tilde{f}_{n_k}(x_0)\}$ 是收敛的. 我们构造函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} (\tilde{\rho}) \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{f}_{n_k}(x), & x \in E^c, \\ 0, & x \in E. \end{cases}$$

因此，$\tilde{f} \in \widetilde{FM}(\tilde{A})$，且 $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上几乎处处收敛于 $\tilde{f}$. 再由定理 8.3.6(1)，$\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

(2) 因为 μ 具有 $(p.p.g.p)$ 性质，对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在 $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ 使得当 $\tilde{E}, \tilde{F} \subset \tilde{A}$ 且 $\mu(\tilde{E}) \wedge \mu(\tilde{F}) > \mu(\tilde{A}) - \delta_1$ 时，

$$\mu(\tilde{E} \cap \tilde{F}) > \mu(\tilde{A}) - \frac{1}{2}.$$

对于上述 $\delta_1 > 0$，存在 $\delta_2 \in (0, \delta_1 \wedge \frac{1}{2^2})$，使得当 $\tilde{E}, \tilde{F} \subset \tilde{A}$ 且 $\mu(\tilde{E}) \wedge$

$\mu(\widetilde{F})>\mu(\widetilde{A})-\delta_2$ 时，

$$\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{F})>\mu(\widetilde{A})-\delta_1$$

及存在 $n_1\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant n_1$ 时，

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_1}(x))<\frac{1}{2}\right\}})<\delta_1.$$

我们取 $n_2>n_1$，由 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度基本的，则当 $n\geqslant n_2$ 时，

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))<\frac{1}{2^2}\right\}})<\delta_2.$$

因此，我们有

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_1}(x))<\frac{1}{2}\right\}\cap\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))<\frac{1}{2^2}\}})$$
$$=\mu((\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_1}(x))<\frac{1}{2}\right\}})\cap(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))<\frac{1}{2^2}\right\}}))$$
$$>\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{2}.$$

对于上述 $\delta_2>0$，存在 $\delta_3\in(0,\delta_2\wedge\frac{1}{2^3})$ 使得当 $\widetilde{E},\widetilde{F}\subset\widetilde{A}$，且 $\mu(\widetilde{E})\wedge\mu(\widetilde{F})>\mu(\widetilde{A})-\delta_3$ 时，

$$\mu(\widetilde{E}\cap\widetilde{F})>\mu(\widetilde{A})-\delta_2.$$

我们取 $n_3>n_2$，再由 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 基本的，当 $n\geqslant n_3$ 时，

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_3}(x))<\frac{1}{2^3}\right\}})<\delta_3.$$

因此

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))<\frac{1}{2^2}\right\}\cap\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_3}(x))<\frac{1}{2^3}\right\}})$$
$$=\mu((\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))<\frac{1}{2^2}\right\}})\cap(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\frac{1}{2^3}\right\}}))$$
$$>\mu(\widetilde{A})-\delta_1,$$

及

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_3}(x),\widetilde{f}_{n_2}(x))<\frac{1}{2^2}\right\}\cap\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_2}(x),\widetilde{f}_{n_1}(x))<\frac{1}{2}\right\}})>\mu(\widetilde{A})-\frac{1}{2}$$

我们重复上述过程，我们能够得到 $n_{k+1}>n_k>n_{k-1}>\cdots>n_1\geqslant 1$ 及 $\delta_{k+1}<\delta_k\wedge\frac{1}{2^{k+1}}$，$k=0,1,2,\cdots$，使得对于任何 $r\geqslant 1$，

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\bigcap_{i=k}^{r+1}\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{i+1}}(x),\widetilde{f}_{n_i}(x))<\frac{1}{2^i}\}})$$
$$>\mu(\widetilde{A})-\delta_{k-1},\qquad (k=2,\cdots,r+1),$$

如果我们记

$$E_k=\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k+1}}(x),\widetilde{f}_{n_k}(x))<\frac{1}{2^k}\right\},$$

及

$$B_k=\bigcap_{i=k}^{\infty}E_i\quad 和\quad E=\liminf_k E_k=\bigcup_{k=2}^{\infty}B_k,$$

则 $B_k\nearrow E$ 及

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{B_k})=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\bigcap_{i=k}^{\infty}E_i})$$
$$\geqslant\mu(\widetilde{A})-\delta_{k-1},\qquad (k\geqslant 2).$$

再由 μ 的连续性，

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_E)=\mu(\widetilde{A}).$$

对于任意给定 $\varepsilon>0$ 及 $\sigma>0$，存在 $k_\varepsilon>2$ 及 $k_\sigma>2$ 使得

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{B_{k_\varepsilon}})>\mu(\widetilde{A})-\varepsilon,$$

及

$$\frac{1}{2^{k-1}}<\sigma,\qquad (k\geqslant k_\sigma).$$

如果 $x_0\in E$，则存在 $k_1>k_\sigma$ 使得

$$x_0\in\bigcap_{i=k_1}^{\infty}\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{i+1}}(x),\widetilde{f}_{n_i}(x))<\frac{1}{2^i}\right\},$$

从而，对于任何 $k\geqslant k_1$，

$$x_0\in\left\{x;\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_{n_{k+1}}(x),\widetilde{f}_{n_k}(x))<\frac{1}{2^k}\right\},$$

故对于任何 $r\geqslant 1$，$k\geqslant k_1$，我们有

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k+r}}(x_0),\tilde{f}_{n_k}(x_0)) \leqslant \sum_{i=1}^{r}\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_{k+i}}(x_0),\tilde{f}_{n_{k+i-1}}(x_0)) < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

即 $\{\tilde{f}_{n_k}(x_0)\}$ 是一个模糊数的基本列，由定理 2.4.4 $\{\tilde{f}_{n_k}(x_0)\}$ 是收敛的，我们构造模糊值函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}(\tilde{\rho})\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{f}_{n_k}(x), & x\in E,\\ 0, & x\in E'.\end{cases}$$

因此 $\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{A})$，且 $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上伪几乎处处收敛于 $\tilde{f}$，再由定理 8.3.6(2)，$\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

定理 8.3.9 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是模糊值模糊测度空间，$\tilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$，$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\tilde{A})$ 且对于任何 $x\in X$，$\{\inf\limits_{n\geqslant k}\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$，$\{\sup\limits_{n\geqslant k}\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$，则

(1) 如果 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质，$\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 基本的，且存在 $\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{A})$ 使得存在 $\{\tilde{f}_n\}$ 的子序列 $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 使得 $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$，则 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$；

(2) 如果 μ 具有 $(p.p.g.p)$ 性质，$\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 基本的，且存在 $\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{A})$ 使得存在 $\{\tilde{f}_n\}$ 的子序列 $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 使得 $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{A})$，则 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 $\tilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$.

证明

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 μ 具有 $(p.g.p)$ 性质，存在 $\delta>0$ 使得当 $\mu(\tilde{E})\vee\mu(\tilde{F})<\delta$ 时

$$\mu(\tilde{E}\cup\tilde{F})<\varepsilon.$$

因为$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ基本的和存在$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{A})$使得$\{\tilde{f}_n\}$存在$\{\tilde{f}_{n_k}\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\tilde{f}$，则存在$n_0,k_0\geqslant1$使得$n_{k_0}>n_0$，且

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_m(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})<\delta,\qquad(m,n\geqslant n_0)$$

和

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})<\delta,\qquad(k\geqslant k_0)$$

因此，当$n\geqslant n_0$时，我们有

$$\begin{aligned}
&\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))\not<\varepsilon\}})\\
&\leqslant\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_{n_k}(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})\\
&=\mu((\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_{n_k}(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})\cup(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))\not<\frac{\varepsilon}{2}\right\}}))\\
&<\varepsilon.
\end{aligned}$$

即$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上强依模糊值模糊测度μ收敛于$\tilde{f}$.

(2) 对于任意给定的$\varepsilon>0$，由于μ具有$(p.p.g.p)$性质，存在$\delta>0$使得当$\tilde{E},\tilde{F}\subset\tilde{A}$且$\mu(\tilde{E})\wedge\mu(\tilde{F})>\mu(\tilde{A})-\delta$时，

$$\mu(\tilde{E}\cap\tilde{F})>\mu(\tilde{A})-\varepsilon.$$

因为$\{\tilde{f}_n\}$在$\tilde{A}$上强伪依模糊值模糊测度μ基本的和存在$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\tilde{A})$使得$\{\tilde{f}_n\}$存在$\{\tilde{f}_{n_k}\}$在$\tilde{A}$上强伪依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\tilde{f}$，则存在$n_0,k_0\geqslant1$使得$n_{k_0}>n_0$且

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_m(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})>\mu(\tilde{A})-\delta,\qquad(n,m\geqslant n_0)$$

和

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\left\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}})>\mu(\tilde{A})-\delta,\qquad(k\geqslant k_0).$$

因此，当$n\geqslant n_0$时，我们有

$$\mu(\tilde{A}\cap\chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon\}})$$

$$\geqslant \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_{n_k}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\} \cap \{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\}})$$

$$= \mu((\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}_{n_k}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\}}) \cap (\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\tilde{\rho}(\tilde{f}_{n_k}(x),\tilde{f}(x))<\frac{\varepsilon}{2}\}})$$

$$> \mu(\widetilde{A}) - \varepsilon,$$

即$\{\tilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\tilde{f}$.

定理 8.3.10 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\tilde{\infty}$，$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\widetilde{A})$且对于任何 $x\in X$，$\{\tilde{f}_n(x)\}\in A^*$，则

(1) 如果 μ 具有$(p.g.p)$性质，则$\{\tilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$的充分必要条件是$\{\tilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 基本的；

(2) 如果 μ 具有$(p.p.g.p)$性质，则$\{\tilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\widetilde{A})$的充分必要条件是$\{\tilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 基本的.

证明

(1) 必要性由定理 8.3.3(1)立知. 充分性，由定理 8.3.8(1)和定理 8.3.9(1)立知.

(2) 必要性由定理 8.3.4(1)立知. 充分性，由定理 8.3.8(2)和定理 8.3.9(2)立知.

第 9 章　模糊值模糊积分

9.1　模糊值模糊可测函数的模糊值模糊积分的定义

本节我们假设$(X,\mathscr{F})$是一个模糊可测空间，μ 是具有 $FM1$ 和 $FM2$ 性质的模糊值模糊集函数，$\widetilde{FM}_+=\{\tilde{f};\tilde{f}\in\widetilde{FM}$且$\tilde{f}(x)\geqslant 0$ $(x\in X)\}$

定义 9.1.1　设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，则$\tilde{f}$在 $\widetilde{A}$ 上关于 μ 的模糊值模糊积分定义为

$$\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})]$$

其中

$$F^-_{\lambda,\alpha}=\{x;(\tilde{f}(x))^-_\lambda\geqslant\alpha\},$$

$$F^+_{\lambda,\alpha}=\{x;(\tilde{f}(x))^+_\lambda\geqslant\alpha\}.$$

定理 9.1.1　对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\tilde{f}\in\widetilde{FM}_+$ 有 $\int_{\widetilde{A}}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu\in\mathscr{F}_+(R)$

证明

(1) 因为 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，所以，对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 及$\tilde{f}\in\widetilde{FM}$且$\tilde{f}(x)\geqslant 0$，有

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_1^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{1,\alpha}})\leqslant\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_1^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{1,\alpha}}),$$

即存在 $x\in X$ 使得

$$\left(\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\, d\mu\right)(x) = 1,$$

（2）因为对于任何 $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant 1$，

$$f_{\lambda_1}^-(x) \leqslant f_{\lambda_2}^-(x) \leqslant f_{\lambda_2}^+(x) \leqslant f_{\lambda_1}^+(x),$$

所以

$$F_{\lambda_1,\alpha}^- \subset F_{\lambda_2,\alpha}^- \subset F_{\lambda_2,\alpha}^+ \subset F_{\lambda_1,\alpha}^+,$$

从而

$$\begin{aligned}
&\mu_{\lambda_1}^-\left(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_1,\alpha}^-}\right) \\
\leqslant &\mu_{\lambda_2}^-(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_2,\alpha}^-}) \\
\leqslant &\mu_{\lambda_2}^+(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_2,\alpha}^+}) \\
\leqslant &\mu_{\lambda_1}^+(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_1,\alpha}^+}).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_{\lambda_1}^-(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_1,\alpha}^-}) &\leqslant \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_{\lambda_2}^-(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_2,\alpha}}) \\
&\leqslant \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_{\lambda_2}^+(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_2,\alpha}^+}) \\
&\leqslant \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_{\lambda_1}^+(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).
\end{aligned}$$

结合(1)和(2)，我们就证明了 $\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\, d\mu \in \mathscr{F}_+^*(R)$.

定理 9.1.2 设 $\tilde{A} \in \mathscr{F}$，$\tilde{f} \in \widetilde{FM}_+$ 则

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\, d\mu = &\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\
&\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big] \\
= &\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-}), \\
&\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^+})\Big] \\
= &\bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\tilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-}),
\end{aligned}$$

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].$$

证明

(1) 如果存在$\lambda_0\in(0,1]$使得

$$\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\infty}^-}) > \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}). \quad (9.1.1)$$

或

$$\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\infty}^+}) > \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}). \quad (9.1.2)$$

不妨设(9.1.1)成立. 则对于任何$\alpha\in[0,\infty)$,

$$\alpha \wedge \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}) < \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\infty}}).$$

又由于

$$\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-} \supset \widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\infty}^-},$$

及$\mu_{\lambda_0}^-$的单调性,我们有

$$\alpha \wedge \mu_{\lambda_0}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}) = \alpha < \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\infty}^-}).$$

故

$$\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\infty}^-}) > \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-})$$

$$= \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha = +\infty.$$

这与事实矛盾! 从而对于任何$\lambda\in(0,1]$,

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\infty}^-}) \leqslant \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

及

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\infty}^+}) \leqslant \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).$$

因此

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}}),$$

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].$$

(2) 由于对于任何$\lambda\in(0,1]$,μ_λ^-和μ_λ^+都是$\mathscr{F}$上的实值模糊测度,所以由模糊测度单调性,对于任何$\alpha\in[0,+\infty]$,

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\geqslant\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

及

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\geqslant\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).$$

因此,我们有

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\geqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-}),$$
$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].$$

如果

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu>\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-}),$$
$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^+})].$$

则存在 $\lambda_0\in(0,1]$使得

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\bar{\alpha}}^-})<\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}),\tag{9.1.3}$$

或

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^+})<\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}).\tag{9.1.4}$$

我们不妨假设(9.1.3)成立,由实数的稠密性存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\bar{\alpha}}^-})+\varepsilon_0<\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}).$$

从而存在 $\alpha_0\in[0,+\infty]$使得

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}})+\frac{\varepsilon_0}{2}<\alpha_0\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}).$$

故

$$\alpha_0>\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}})+\frac{\varepsilon_0}{2}=a+\frac{\varepsilon_0}{2},$$

且

$$\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}})>\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\bar{\alpha}}^-})+\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$=a+\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

再由 $\mu_{\lambda_0}^-$的单调性，

$$\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\overline{a+\frac{\varepsilon_0}{2}}}})\geqslant\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}})>a+\frac{\varepsilon_0}{2},$$

故

$$\begin{aligned}a&=\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\bar{\alpha}}})\\&\geqslant\left(\alpha_0+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\wedge\mu_{\lambda_0}^-\left(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\overline{a+\frac{\varepsilon_0}{2}}}}\right)\\&=a+\frac{\varepsilon_0}{2}>a,\end{aligned}$$

这是矛盾的！从而证明了

$$\begin{aligned}\int_X\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[&\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),\\&\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\bar{\alpha}}})].\end{aligned}$$

（3）因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$\{x;f_\lambda^-(x)>+\infty\}=\varnothing$ 和 $\{x;f_\lambda^+(x)>+\infty\}=\varnothing$，

所以

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\bar{\infty}}})=\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\bar{\infty}}})=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_X\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\bar{\alpha}}}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\bar{\alpha}}})]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[0\vee\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\bar{\alpha}}}),\\&\qquad 0\vee\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\bar{\alpha}}})]\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].$$

定理 9.1.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，则

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}),$$

$$\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \widetilde{E})]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_E),$$

$$\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_E)]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{E\in B(f_\lambda^-)}(\inf_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_E),$$

$$\sup_{E\in B(f_\lambda^+)}(\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_E)]$$

其中 $B(f_\lambda^-)$和 $B(f_\lambda^+)$($\lambda\in(0,1]$)是分别由 f_λ^- 和 f_λ^+产生的 σ-代数.

证明

(1) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[0,+\infty]$，我们有

$$\inf_{x\in F_{\lambda,\alpha}^-} f_\lambda^-(x) \geqslant \alpha \quad \text{和} \quad \inf_{x\in F_{\lambda,\alpha}^+} f_\lambda^+(x) \geqslant \alpha,$$

我们注意到 $F_{\lambda,\alpha}^-\in B(f_\lambda^-)$，$F_{\lambda,\alpha}^+\in B(f_\lambda^+)$，所以

$$\alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}})$$

$$\leqslant(\inf_{x\in F_{\lambda,\alpha}^-} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})$$

$$\leqslant \sup_{E\in B(f_\lambda^-)}(\inf_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_E)$$

及

$$\alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) \leqslant(\inf_{x\in F_{\lambda,\alpha}^+} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})$$

$$\leqslant \sup_{E\in B(f_\lambda^+)}(\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_E)$$

因此，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\leqslant\sup_{E\in B(f_\lambda^-)}(\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E)$$

及

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\leqslant\sup_{E\in B(f_\lambda^+)}(\inf_{x\in E}f_\lambda^+(x))\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E).$$

故

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{E\in B(f_\lambda^-)}(\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\sup_{E\in B(f_\lambda^+)}(\inf_{x\in E}f_\lambda^+(x))\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)].$$

(2) 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$B(f_\lambda^-)\subset\mathscr{F}_0$，$B(f_\lambda^+)\subset\mathscr{F}_0$，则

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{E\in B(f_\lambda^-)}(\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),\sup_{E\in B(f_\lambda^+)}(\inf_{x\in E}f_\lambda^+(x))\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)]\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)].$$

(3) 因为 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$，则

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E}f_\lambda^+(x))\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)]$$

$$\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}),\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0}f_\lambda^+(x))\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})].$$

(4) 对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$，$\lambda\in(0,1]$，我们取

$$\alpha_\lambda^-=\inf_{\widetilde{E}(x)>0}f_\lambda^-(x)\quad 和\quad \alpha_\lambda^+=\inf_{\widetilde{E}(x)>0}f_\lambda^+(x).$$

所以，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，我们有

$$f_\lambda^-(x)\geqslant\alpha_\lambda^-\quad 和\quad f_\lambda^+(x)\geqslant\alpha_\lambda^+.$$

因此，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\widetilde{E}(x)>0$，

$$x\in F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}\quad 和\quad x\in F^+_{\lambda,\alpha_\lambda^+}.$$

换句话说，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\widetilde{E} \subset \chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}} \quad 和 \quad \widetilde{E} \subset \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_\lambda^+}}.$$

从而，对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{F}$，$\lambda \in (0,1]$，

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}) \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_\lambda^-}}),$$

及

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}) \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_\lambda^+}}).$$

故，对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{F}$，$\lambda \in (0,1]$，

$$\begin{aligned}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}) &\leqslant \alpha_\lambda^- \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_\lambda}}) \\ &\leqslant \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}) &\leqslant \alpha_\lambda^+ \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_\lambda^+}}) \\ &\leqslant \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}).\end{aligned}$$

由此可知，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，

$$\sup_{\widetilde{E} \in \mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}) \leqslant \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}).$$

及

$$\sup_{\widetilde{E} \in \mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}) \leqslant \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}).$$

从而

$$\begin{aligned}&\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda[\sup_{\widetilde{E} \in \mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \widetilde{E}), \sup_{\widetilde{E} \in \mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x)) \\ &\wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \widetilde{E})] \leqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

我们结合(1)～(4)完成了该定理的证明.

定义 9.1.2 称 $\widetilde{S}: X \to \mathscr{F}_+^*(R)$ 称为简单模糊值函数，如果 $\widetilde{S}$ 的值域是有限模糊数集.

命题 9.1.1 设 $\widetilde{S}$ 是一个简单模糊值函数且 $\widetilde{S}$ 的值域 $=\{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \cdots, \widetilde{a}_n\}$，令 $D_k = \widetilde{S}^{-1}(\{\widetilde{a}_k\})$，$k=1,2,\cdots,n$，则对于任何 $x \in X$，

$$\widetilde{S}(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \widetilde{a}_k \cdot \chi_{D_k}(x).$$

证明 对于任何 $x\in X$，存在 $k_0\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得

$$\widetilde{S}(x)=\widetilde{a}_{k_0}.$$

因此

$$x\in\widetilde{S}^{-1}(\{\widetilde{a}_{k_0}\})=D_{k_0},$$

换句话说

$$\chi_{D_{k_0}}(x)=1.$$

我们注意到 $D_k\cap D_m=\varnothing$，$k\neq m,k,m=1,2,\cdots,n$. 故

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\widetilde{a}_k\cdot\chi_{D_k}(x)=\widetilde{a}_{k_0}=\widetilde{S}(x).$$

命题 9.1.2 设 $\widetilde{S}$ 是一个简单模糊值函数，如果

$$\widetilde{S}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\widetilde{a}_k\cdot\chi_{D_k}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\widetilde{b}_i\cdot\chi_{E_i},$$

则对于任何 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在唯一 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$\widetilde{a}_k=\widetilde{b}_i,\ 且\ D_k=E_i.$$

证明 对于任何 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，由于 $D_k\neq\varnothing$，存在 $x_0\in D_k$，这样

$$\widetilde{S}(x_0)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\widetilde{a}_k\cdot\chi_{D_k}(x_0)=\widetilde{a}_k.$$

另一方面，由于 $X=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$，所以，$D_k=\bigcup_{i=1}^{m}(D_k\cap E_i)$，从而存在唯一 i 使得

$$x_0\in D_k\cap E_i\subseteq E_i,$$

这样

$$\widetilde{S}(x_0)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\widetilde{b}_i\cdot\chi_{E_i}(x_0)=\widetilde{b}_i,$$

故

$$\widetilde{a}_k=\widetilde{b}_i.$$

如果 $D_k\neq E_i$，则存在 $x_0\in D_k$ 但 $x\notin E_i$ 或 $x_0\in E_i$ 但 $x\notin D_k$. 不妨设 $x_0\in D_k$ 但 $x_0\notin E_i$，这样，一定存在 i_0 使得 $x_0\in E_{i_0}(i_0\neq i)$，从而

$$\widetilde{b}_i=\widetilde{a}_k=\widetilde{S}(x_0)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\widetilde{b}_i\cdot\chi_{E_i}(x)=\widetilde{b}_{i_0},$$

这与当 $i\neq j$ 时 $\bar{b}_i\neq\bar{b}_j$ 矛盾!

定理 9.1.4 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F},\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_-$,如果我们对于任何简单模糊值函数 $\widetilde{S}$ 定义

$$Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{S})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^-\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i}),\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^+\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i})],$$

则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\sup_{\widetilde{S}\in H(\widetilde{f})}Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{S}),$$

其中 $H(\widetilde{f})=\{\widetilde{S};\widetilde{f}\geqslant\widetilde{S},\widetilde{S}$ 为 $\mathscr{F}_0$ 中的简单模糊值函数$\}$.

证明 由定理 9.1.3 知我们只须证明

$$\sup_{\widetilde{S}\in H(\widetilde{f})}Q_{\widetilde{A}}\widetilde{S}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E}f_\lambda^+(x))\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)].$$

事实上,对于任何 $\lambda\in(0,1],E\in\mathscr{F}_0$,我们令

$$a_{0_\lambda}^-=\inf_{x\in E}f_\lambda^-(x)\quad 和\quad a_{0_\lambda}^+=\inf_{x\in E}f_\lambda^+(x),$$

则

$$\widetilde{a}_0=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_{0_\lambda}^-,a_{0_\lambda}^+]=\inf_{x\in E}\widetilde{f}(x)\in\mathscr{F}_+^*(R).$$

我们定义

$$\widetilde{S}_0(x)=\widetilde{a}_0\cdot\chi_E(x)\vee 0\cdot\chi_{E^c}(x),\quad(x\in X)$$

则 $\widetilde{S}_0$ 是简单模糊值函数,又因为对于任何 $x\in X$,有 $x\in E$ 或 $x\in E^c$,从而 $\widetilde{S}_0(x)=\widetilde{a}_0$ 或 $\widetilde{S}_0(x)=0$,故

$$\widetilde{S}_0(x)\leqslant\widetilde{f}(x),\quad(x\in X),$$

即 $\widetilde{S}_0\in H(\widetilde{f})$. 这样

$$\begin{aligned}\sup_{\widetilde{S}\in H(\widetilde{f})}Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{S})&\geqslant Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{S}_0)\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_{0_\lambda}^-\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),a_{0_\lambda}^+\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[(\inf_{x\in E}\widetilde{f}_\lambda(x))\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),\end{aligned}$$

$$(\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_E)].$$

故

$$\sup_{\widetilde{S}\in H(\widetilde{f})} Q_A(\widetilde{S}) \geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{E\in\mathscr{F}_0} (\inf_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_E),$$

$$\sup_{E\in\mathscr{F}_0} (\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_E)].$$

另一方面，对于任何

$$\widetilde{S} - \max_{1\leqslant i\leqslant n} \widetilde{a}_i \cdot \chi_{E_i} \in H(\widetilde{f}),$$

由 $Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{S})$ 的定义，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，存在 $1\leqslant i_{0_\lambda}\leqslant n$ 及 $1\leqslant i'_{0_\lambda}\leqslant n$ 使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^- \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{E_i}) - a_{i_{0_\lambda}}^- \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{E_{i_0}}),$$

及

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^+ \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{E_i}) = a_{i'_{0_\lambda}}^- \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{E_{i'_0}}).$$

因为 $\widetilde{S}\leqslant\widetilde{f}$，所以，对于任何 $x\in E_{i_0}$，

$$a_{i_{0_\lambda}}^- \leqslant f_\lambda^-(x),$$

从而

$$a_{i_{0_\lambda}}^- \leqslant \inf_{x\in E_{i_0}} f_\lambda(x),$$

故

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^- \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{E_i}) = a_{i_{0_\lambda}}^- \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{E_{i_0}})$$

$$\leqslant (\inf_{x\in E_{i_0}} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{E_{i_0}})$$

$$\leqslant \sup_{E\in\mathscr{F}_0} (\inf_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_E).$$

同理可证

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^+ \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{E_i}) \leqslant \sup_{E\in\mathscr{F}_0} (\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_E).$$

从而

$$Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{S}) \leqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{E\in\mathscr{F}_0} (\inf_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_E),$$

$$\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)],$$

故

$$\sup_{\widetilde{S}\in H(\widetilde{f})} Q_{\widetilde{A}}(\widetilde{S}) \leqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\sup_{E\in\mathscr{F}_0}(\inf_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)].$$

结合两方面,我们完成了该定理的证明.

定理 9.1.5 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$,则

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}),$$

$$\inf_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-}),$$

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \vee \mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-}),$$

$$\inf_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].$$

证明

(1) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $\alpha\in[0,+\infty]$,

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}) = \sup_{\beta\in[0,\alpha)} \beta \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}})$$

$$\vee \sup_{\beta\in[\alpha,\infty]} \beta \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^-})$$

$$\leqslant \sup_{\beta\in[0,\alpha)} \beta \vee \sup_{\beta\in[\alpha,\infty]} \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^-})$$

$$-\alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).$$

从而

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) \leqslant \inf_{\alpha\in[0,+\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).$$

如果

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) < \inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

由实数的稠密性，存在 $\alpha_\lambda^- \in [0,\infty]$ 使得

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) < \alpha_\lambda^- < \inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

从而

$$\alpha_\lambda^- \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}^-}) < \alpha_\lambda^-.$$

因此

$$\mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}^-}) < \alpha_\lambda^-.$$

故

$$\alpha_\lambda^- = \alpha_\lambda^- \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda}^{'}}) \geqslant \inf_{\alpha\in[0,+\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}}).$$

这与 α_λ 的定义矛盾！由此可以得到，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) = \inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).$$

同理可证，对于任何 $\lambda\in(0,1]$

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) = \inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).$$

故

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\, \mathrm{d}\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].$$

(2) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，由 μ 的单调性，我们有

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) \geqslant \inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-})$$

及

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) \geqslant \inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^+}).$$

如果存在 $\lambda_0\in(0,1]$ 使得

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}) > \inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha \vee \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\bar{\alpha}}^-}),\tag{9.1.5}$$

或

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{+}})>\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{+}}),\tag{9.1.6}$$

我们不妨假定(9.1.5)成立. 由实数的稠密性，存在 $\alpha_0\in[0,\infty)$ 使得

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{-}})>\alpha_0>\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{-}}),$$

再由确界定义，对于任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\beta_0\in[0,\infty)$ 使得

$$\alpha_0>\inf_{\alpha\in[0,+\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda_0}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{-}})\geqslant\beta_0\vee\mu_{\lambda_0}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\beta_0}^{-}})-\varepsilon.$$

因此

$$\alpha_0+\varepsilon>\beta_0\text{ 及 }\alpha_0+\varepsilon>\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\beta_0}^{-}}).$$

这样

$$\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0+\varepsilon}})\leqslant\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\beta_0}})<\alpha_0+\varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}\alpha_0+\varepsilon&=(\alpha_0+\varepsilon)\vee\mu_{\lambda_0}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0+\varepsilon}^{-}})\\&\geqslant\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda_0}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{-}}).\end{aligned}$$

再由 ε 的任意性，

$$\alpha_0\geqslant\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda_0}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{-}}),$$

这与 α_0 的定义相矛盾！故由(1)得到

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,d\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[&\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}),\\&\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}})].\end{aligned}$$

(3) 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$F_{\lambda,\infty}^{-}=F_{\lambda,\infty}^{+}=\varnothing,$$

所以

$$\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\infty}^{-}})=\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\infty}^{+}})=0,$$

从而

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})&=\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{-}})\\&\quad\wedge(\infty\vee\mu_{\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\overline{\infty}}})\\&=\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}),\end{aligned}$$

及

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{+}})=\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}}).$$

故由(2)我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[&\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{-}}),\\&\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}})].\end{aligned}$$

(4) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，如果 $\mu_{\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}^{-}})=0$，则对于任何 $\alpha\in(0,+\infty]$，

$$0=\mu_{\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}^{-}})\geqslant\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}})\geqslant 0.$$

从而

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{-}})&=\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})\\&=\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha=0.\end{aligned}$$

如果 $\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}})>0$，则存在 $\alpha_0>0$，使得

$$\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}^{-}})>\alpha_0>0,$$

因此

$$\begin{aligned}\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}})&\geqslant\alpha_0\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_0}})\\&\geqslant\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{-}})&=\mu_{\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}})\wedge\inf_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\\&\quad\vee\mu_{\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{-}})\\&=\inf_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\vee\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}).\end{aligned}$$

故对于任何 $\lambda\in(0,1]$，我们总有

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})=\inf_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}).$$

同理可证，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})=\inf_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).$$

再由(3)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[&\inf_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\\&\inf_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].\end{aligned}$$

定理 9.1.6 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，则

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\widetilde{E}(x)>0}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c),\\&\qquad\inf_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\widetilde{E}(x)>0}f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E^c),\\&\qquad\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E}f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E^c)]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{E\in B(f_\lambda^-)}(\sup_{x\in E}f_\lambda(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E^c),\\&\qquad\inf_{E\in B(f_\lambda^+)}(\sup_{x\in E}f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E^c)].\end{aligned}$$

证明

(1) 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[0,\infty]$，我们有

$$\sup_{x\in F_{\lambda,\alpha}^{-c}}f_\lambda^-(x)\leqslant\alpha\quad\text{和}\quad\sup_{x\in F_{\lambda,\alpha}^{+c}}f_\lambda^+(x)\leqslant\alpha.$$

注意到 $\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}\in B(f_\lambda)$，$\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}\in B(f_\lambda^+)$，

因此

$$\begin{aligned}\alpha\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})&\geqslant(\sup_{x\in F_{\lambda,\alpha}^{-c}}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\\&\geqslant\inf_{E\in B(f_\lambda^-)}(\sup_{x\in E}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),\end{aligned}$$

及

$$\alpha \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) \geqslant (\sup_{x\in F_{\lambda,\alpha}^{-c}} f_\lambda^+(x)) \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})$$

$$\geqslant \inf_{E\in B(f_\lambda^+)} (\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E).$$

从而,对于任何 $\lambda\in(0,1]$

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) \geqslant \inf_{E\in B(f_\lambda^-)} (\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

及

$$\inf_{\alpha\in[0,\infty]} \alpha\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) \geqslant \inf_{E\in B(f_\lambda^+)}(\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E).$$

故

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{E\in B(f_\lambda^-)}(\sup_{x\in E}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\inf_{E\in B(f_\lambda^+)}(\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)].$$

(2) 因为对于任何 $\lambda\in(0,1]$, $B(f_\lambda^-)$, $B(f_\lambda^+)\subseteq\mathscr{F}_0$,我们有

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{E\in B(f_\lambda^-)}(\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\inf_{E\in B(f_\lambda^+)}(\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)]$$

$$\geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E)].$$

(3) 因为 $\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{F}$,则

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)]$$

$$\geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c),$$

$$\inf_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}^c)].$$

(4) 对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$, $\lambda\in(0,1]$,我们取

$$\alpha_\lambda^- = \sup_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x) \quad 和 \quad \alpha_\lambda^+ = \sup_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x).$$

所以,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,我们有

$$f_\lambda^-(x)\leqslant\alpha_\lambda^- \quad 和 \quad f_\lambda^+(x)\leqslant\alpha_\lambda^+,\ (\tilde{E}(x)>0),$$

因此,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$\tilde{E}(x)>0$,

$$x\in F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}^{-c} \quad 和 \quad x\in F_{\lambda,\alpha_\lambda^+}^{+c}.$$

换句话说,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$\tilde{E}\subset\chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}} \quad 和 \quad \tilde{E}\subset\chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^+}^+}.$$

从而,对于任何 $\tilde{E}\in\mathscr{F}$,$\lambda\in(0,1]$,

$$\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c)\geqslant\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda}^-}),$$

及

$$\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c)\geqslant\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^+}^+}).$$

故,对于任何 $\tilde{E}\in\mathscr{F}$,$\lambda\in(0,1]$,

$$\begin{aligned}(\sup_{\tilde{E}(x)>0}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c)&\geqslant\alpha_\lambda^-\vee\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}^-})\\&\geqslant\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}(\sup_{\tilde{E}(x)>0}f_\lambda^+(x)\vee\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c)&\geqslant\alpha_\lambda^-\vee\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^+}^-})\\&\geqslant\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).\end{aligned}$$

由此可知,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$\inf_{\tilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\tilde{E}(x)>0}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c)\geqslant\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}),$$

及

$$\inf_{\tilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\tilde{E}(x)>0}f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c)\geqslant\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\vee\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).$$

从而

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{\tilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\tilde{E}(x)>0}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c),\inf_{\tilde{E}\in\mathscr{F}}(\sup_{\tilde{E}(x)>0}f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\tilde{E}^c)]\geqslant\int_{\tilde{A}}\tilde{f}\mathrm{d}\mu.$$

我们结合(1)~(4)完成了该定理的证明.

定理 9.1.7 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，如果我们对任何简单模糊值函数 $\widetilde{S}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\widetilde{a}_i\cdot\chi_{E_i}$，我们定义

$$P_{\widetilde{A}}(\widetilde{S})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_{i_\lambda}^-\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i}),$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_{i_\lambda}^+\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i})],$$

则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\inf_{\widetilde{S}\in N(\widetilde{f})}P_{\widetilde{A}}(\widetilde{S}).$$

其中 $N(\widetilde{f})=\{\widetilde{S};\widetilde{S}\geqslant\widetilde{f},\widetilde{S}$ 为 $\mathscr{F}_0$ 中的简单模糊值函数$\}$

证明 由定理 9.1.6 知，我们只须证明

$$\inf_{\widetilde{S}\in N(\widetilde{f})}P_{\widetilde{A}}(\widetilde{S})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E^c),$$

$$\inf_{E\in\mathscr{F}_0}(\sup_{x\in E}f_\lambda^+(x))\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E^c)].$$

事实上，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$E\in\mathscr{F}_0$，我们令

$$a_{0_\lambda}^-=\sup_{x\in E}f_\lambda^-(x)\quad 和\quad a_{0_\lambda}^+=\sup_{x\in E}f_\lambda^+(x),$$

则
$$\widetilde{a}_0=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_{0_\lambda}^-,a_{0_\lambda}^+]=\sup_{x\in E}\widetilde{f}(x)\in\mathscr{F}_+^*(R),$$

我们定义

$$\widetilde{S}_0(x)=\widetilde{a}_0\cdot\chi_E\vee\widetilde{a}_1\cdot\chi_E^c,$$

其中 $\widetilde{a}_1\geqslant\max(\widetilde{a}_0,\mu(\widetilde{A}\cap\chi_E),\sup\limits_{x\in E^c}\widetilde{f}(x))$，则 $\widetilde{S}_0$ 是简单模糊值函数，且 $\widetilde{S}_0\geqslant\widetilde{f}$. 即 $\widetilde{S}_0\in N(\widetilde{f})$，这样

$$\begin{aligned}\inf_{\widetilde{S}\in N(\widetilde{f})}P_{\widetilde{A}}(\widetilde{S})&\leqslant P_{\widetilde{A}}(\widetilde{S}_0)\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[(a_{0_\lambda}^-\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E^c))\wedge(a_{1_\lambda}^-\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E)),\\&\qquad(a_{0_\lambda}^+\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E^c))\wedge(a_{1_\lambda}^+\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E))]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_{0_\lambda}^-\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E^c),a_{0_\lambda}^+\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E^c)]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[(\sup_{x\in E}f_\lambda^-(x))\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E^c),\end{aligned}$$

$$(\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_E)],$$

故

$$\inf_{\widetilde{S}\in N(\widetilde{f})} P_{\widetilde{A}}(\widetilde{S}) \leqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)].$$

另一方面，对于任何 $\widetilde{S}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\widetilde{a}_i \cdot \chi_{E_i} \in N(\widetilde{f})$，由 $P_{\widetilde{A}}(\widetilde{S})$的定义，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，存在 $1\leqslant i_{0_\lambda}\leqslant n$ 及 $1\leqslant i_0'\leqslant n$ 使得

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^- \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i}) = a_{i_{0_\lambda}}^- \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{E_{i_0}}),$$

及

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^+ \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i}) = a_{i_{0_\lambda}'}^+ \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{E_{i_0'}}).$$

因为 $\widetilde{S}\geqslant\widetilde{f}$，所以，对于任何 $x\in E_{i_0}$，

$$a_{i_{0_\lambda}}^- \geqslant f_\lambda^-(x),$$

从而

$$a_{i_{0_\lambda}}^- \geqslant \sup_{x\in E_{i_0}} f_\lambda^-(x).$$

故

$$\begin{aligned}\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^- \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i}) &= a_{i_{0_\lambda}}^- \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{E_{i_0}}) \\ &\geqslant (\sup_{x\in E_{i_0}} f_\lambda^-(x)) \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{E_{i_0}}) \\ &\geqslant \inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_E).\end{aligned}$$

同理可证

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i_\lambda}^+ \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{E_i}) \geqslant \inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E).$$

从而

$$P_{\widetilde{A}}(S) \geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda(x)) \vee \mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_E)],$$

故

$$\inf_{\tilde{S}\in N(\tilde{f})} P_{\tilde{A}}(\tilde{S}) \geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda^-(x)) \vee \mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_E),$$

$$\inf_{E\in\mathscr{F}_0} (\sup_{x\in E} f_\lambda^+(x)) \vee \mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\chi_E)].$$

结合两方面，我们完成了该定理的证明.

9.2 模糊值模糊可测函数的模糊值模糊积分的性质

本节，我们假设$(X,\mathscr{F})$是一个模糊可测空间，μ是具有$FM1$和$FM2$性质的模糊值模糊集函数，$\widetilde{FM}_+$表示$\{\tilde{f};\tilde{f}\in\widetilde{FM},\tilde{f}(x)\geqslant 0(x\in X)\}$.

性质 9.2.1 设$\tilde{A}\in\mathscr{F}$，$\tilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，如果$\mu(\tilde{A})=0$，则

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

证明 因为$\mu(\tilde{A})=0$，所以由μ的单调性，对于任何$\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in[0,\infty]$，

$$0\leqslant \mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\leqslant\mu_\lambda^-(\tilde{A})=0,$$

及

$$0\leqslant \mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\leqslant\mu_\lambda^+(\tilde{A})=0,$$

从而

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\tilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),$$

$$\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\tilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})]$$

$$=0.$$

性质 9.2.2 设$\tilde{A}\in\mathscr{F}$，$\tilde{f}_1,\tilde{f}_2\in\widetilde{FM}_+$，如果$\tilde{f}_1\leqslant\tilde{f}_2$，则

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_2 \mathrm{d}\mu.$$

证明 对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$\alpha \in [0,\infty]$，我们有

$$F^-_{1_{\lambda,\alpha}} = \{x; f^-_{1_\lambda}(x) \geqslant \alpha\} \subset \{x; f^-_{2_\lambda}(x) \geqslant \alpha\} = F^-_{2_{\lambda,\alpha}},$$

及

$$F^+_{1_{\lambda,\alpha}} = \{x; f^-_{1_\lambda}(x) \geqslant \alpha\} \subset \{x; f^+_{2_\lambda}(x) \geqslant \alpha\}$$
$$= F^+_{2_{\lambda,\alpha}},$$

根据 μ 的单调性，

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{1_{\lambda,\alpha}}}) \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{2_{\lambda,\alpha}}}),$$

及

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{1_{\lambda,\alpha}}}) \leqslant \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{2_{\lambda,\alpha}}}).$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [\sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{1_{\lambda,\alpha}}}), \\
&\quad \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{1_{\lambda,\alpha}}})] \\
&\leqslant \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [\sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{2_{\lambda,\alpha}}}), \\
&\quad \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{2_{\lambda,\alpha}}})] \\
&= \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_2 \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

性质 9.2.3 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，$\widetilde{f} \in \widetilde{FM}_+$，如果 $\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu = 0$，则对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$\alpha > 0$，我们有

$$\mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}) = \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) = 0.$$

证明 由于 $\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \mathrm{d}\mu = 0$，则根据定义 9.1.1，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}}) = \sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) = 0.$$

从而，对于任何 $\alpha\in(0,\infty)$，

$$\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})=\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})=0.$$

故，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha>0$，

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})=\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})=0.$$

推论 9.2.1 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，$\mu$ 具有 $FM3$，如果 $\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=0$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}})=\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{0}}^+})=0.$$

证明 由性质 9.2.3 及 μ 具有 $FM3$ 可以立得.

性质 9.2.4 设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，如果 $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$，则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为 $\widetilde{A}\subset\widetilde{B}$，所以，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in(0,\infty)$，我们有

$$\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}\subset\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}\text{ 及 }\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}\subset\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}.$$

再根据 μ 的单调性，

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\leqslant\mu_\lambda^-(\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

及

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\leqslant\mu_\lambda^+(\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big]\\&\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big]\\&=\int_{\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

性质 9.2.5 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in\widetilde{FM_+}$，则

$$\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}_1\vee\widetilde{f}_2)\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu\vee\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu.$$

证明 由性质 9.2.2 立得.

性质 9.2.6 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in\widetilde{FM_+}$，则

$$\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}_1\wedge\widetilde{f}_2)\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu\wedge\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu.$$

证明 由性质 9.2.2 立得.

性质 9.2.7 设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，则

$$\int_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu\vee\int_{\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 由性质 9.2.4 立得.

性质 9.2.8 设 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，则

$$\int_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu\wedge\int_{\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 由性质 9.2.4 立得.

性质 9.2.9 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{a}\in\mathscr{F}_+^*(R)$，则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{a}\mathrm{d}\mu=\widetilde{a}\wedge\mu(\widetilde{A}).$$

证明 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，当 $a_\lambda^-\geqslant\beta\geqslant0$ 时，

$$\{x;a_\lambda^-\geqslant\beta\}=X,$$

所以

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;a_\lambda^-\geqslant\beta\}})=\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap X)=\mu_\lambda(\widetilde{A});$$

当 $\beta>a_\lambda^-$ 时，

$$\{x;a_\lambda^-\geqslant\beta\}=\varnothing,$$

所以

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;a_\lambda^-\geqslant\beta\}})=\mu_\lambda^-(\varnothing)=0.$$

同理可证，当 $a_\lambda^+\geqslant\beta\geqslant0$ 时，

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^+ \geq \beta\}}) = \mu_\lambda^+(\widetilde{A});$$

当 $\beta > a_\lambda^+$ 时，

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^+ \geq \beta\}}) = \mu_\lambda^+(\varnothing) = 0.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_A \widetilde{a}\,d\mu &= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\beta\in(0,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^- \geq \beta\}}),\\ &\quad \sup_{\beta\in(0,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^+ \geq \beta\}})]\\ &= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\beta\in[0,a_\lambda^-]} \beta \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^- \geq \beta\}})\\ &\quad \vee \sup_{\beta\in(a_\lambda^-,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^- \geq \beta\}}),\\ &\quad \sup_{\beta\in[0,a_\lambda^+]} \beta \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^+ \geq \beta\}})\\ &\quad \vee \sup_{\beta\in(a_\lambda^+,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;a_\lambda^+ \geq \beta\}})]\\ &= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[a_\lambda^- \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}), a_\lambda^+ \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A})]\\ &= \widetilde{a} \wedge \mu(\widetilde{A}).\end{aligned}$$

性质 9.2.10 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_1$，$\widetilde{a}\in\mathscr{F}_+^-(R)$，则

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}+\widetilde{a})d\mu &\leqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,d\mu + \widetilde{a} \wedge \mu(\widetilde{A})\\ &= \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,d\mu + \int_{\widetilde{A}} \widetilde{a}\,d\mu.\end{aligned}$$

证明 由定理 9.1.3，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0}(f_\lambda^-(x) - a_\lambda^-)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})\\ =&\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}((\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) + a_\lambda^-) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})\\ \leqslant&\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}((\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}) + a_\lambda^- \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}))\\ \leqslant&\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}) + \sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(a_\lambda \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}))\end{aligned}$$

$$=\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}) + a_\lambda^- \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}),$$

同理,我们有

$$\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0}(f_\lambda^+(x)+a_\lambda^+)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})$$

$$\leqslant \sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}) + a_\lambda^+ \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}),$$

从而

$$\int_{\widetilde{A}}(\widetilde{f}+\widetilde{a})\mathrm{d}\mu$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0}(f_\lambda^-(x)+a_\lambda^-)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}),$$

$$\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0}(f_\lambda^+(x)+a_\lambda^+)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})]$$

$$\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}) + a_\lambda^- \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}),$$

$$\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}) + a_\lambda^- \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A})]$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^-(x)) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\widetilde{E}),$$

$$\sup_{\widetilde{E}\in\mathscr{F}}(\inf_{\widetilde{E}(x)>0} f_\lambda^+(x)) \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\widetilde{E})]$$

$$+\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[a_\lambda^- \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A}), a_\lambda^+ \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A})]$$

$$=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu + \widetilde{a} \wedge \mu(\widetilde{A}).$$

性质 9.2.11 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\in\widetilde{FM}_+$, 如果对于任何 $\alpha\in(0,\infty)$, $\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_1(x),\widetilde{f}_2(x))<\alpha(x\in X)$, 则

$$\widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu, \int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu\right)<2\alpha.$$

证明 由 $\widetilde{\rho}(\widetilde{a},\widetilde{b})\leqslant\alpha\Leftrightarrow\widetilde{a}-\alpha\leqslant\widetilde{b}\leqslant\widetilde{a}+\alpha$ 及性质 9.2.2 及性质 9.2.10 立知.

定理 9.2.1 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$, $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$, 则 $\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\mathrm{d}\mu\neq\widetilde{\infty}$ 的充分必要条件是对于任何 $\lambda\in(0,1]$, 存在 $a_\lambda^-\in(0,\infty)$ 及 $a_\lambda^+\in(0,\infty)$,

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha^{+}_{\lambda}}}) \neq \widetilde{\infty} \quad 及 \quad \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{\lambda,\alpha^{-}_{\lambda}}}) \neq \infty.$$

证明 如果对于任何 $\lambda \in (0,1]$，存在 $\alpha^{+}_{\lambda} \in (0,\infty)$ 使得 $\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha^{+}_{\lambda}}}) \neq \widetilde{\infty}$，则对于任何 $\alpha \geqslant \alpha^{+}_{\lambda}$，我们有

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}) \leqslant \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha^{-}_{\lambda}}}) \neq \widetilde{\infty}.$$

所以，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$\alpha \geqslant \alpha^{+}_{\lambda}$，

$$\mu^{+}_{\lambda}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}) \leqslant \mu^{+}_{\lambda}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha^{+}_{\lambda}}}) < +\infty.$$

从而，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，

$$\begin{aligned}
&\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu^{+}_{\lambda}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}) \\
&= \sup_{\alpha \in (0,\alpha^{+}_{\lambda})} \alpha \wedge \mu^{+}_{\lambda}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha_{\lambda}}}) \vee \sup_{\alpha \in (\alpha^{+}_{\lambda},\infty)} \alpha \wedge \mu^{+}_{\lambda}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}) \\
&\leqslant \alpha^{+}_{\lambda} \vee \mu^{+}_{\lambda}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha^{+}_{\lambda}}}) < +\infty.
\end{aligned}$$

故

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu \neq \widetilde{\infty}.$$

反之，如果存在 $\lambda_0 \in (0,1]$，对于任何 $\alpha \in (0,\infty)$ $\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda_0,\alpha}}) = \widetilde{\infty}$。所以，对于任何 $M > 0$，存在 $\lambda_1 \in (0,1]$ 使得

$$\mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{\lambda_0,\alpha}}) \geqslant M.$$

如果 $\lambda_1 < \lambda_0$，则由 $f^{+}_{\lambda_1}(x) \geqslant f^{+}_{\lambda_0}(x)$ 知

$$\mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda_1,\alpha}}) \geqslant \mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda_0,\alpha}}) \geqslant M.$$

从而

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda_1,\alpha}}) \geqslant \sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge M = M.$$

如果 $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$，则

$$\mu^{+}_{\lambda_0}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda_0,\alpha}}) \geqslant \mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda_0,\alpha}}) \geqslant M,$$

从而

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda_0}^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^{+}}) \geqslant \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge M = M.$$

故

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \widetilde{\infty}$$

这与条件相矛盾！

定理 9.2.2 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，我们记 $\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \widetilde{a} \in \mathscr{F}_+^*(R)$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in(0,\infty)$，

$$\alpha \wedge \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}) \leqslant a_\lambda^{-} \leqslant \alpha \vee \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{-}}), \quad (9.2.1)$$

及

$$\alpha \wedge \mu_\lambda^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}}) \leqslant a_\lambda^{+} \leqslant \alpha \vee \mu_\lambda^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}}). \quad (9.2.2)$$

证明 对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in(0,\infty)$，由定理 9.1.2，

$$a_\lambda^{-} = \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}) \geqslant \alpha \wedge \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}}),$$

再由定理 9.1.5 知

$$a_\lambda^{-} = \inf_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \vee \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})$$
$$\leqslant \alpha \vee \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^{-}}).$$

即(9.2.1)成立.

同理可证(9.2.2)成立.

定理 9.2.3 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，$\mu$ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，我们记 $\widetilde{a} = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu$，则

(1) $a_\lambda^{+}<\alpha \Leftrightarrow$存在 $\beta\in[0,\alpha)$使得 $\mu_\lambda^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^{+}})<\alpha$

$$\Rightarrow \mu_\lambda^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}})<\alpha \Rightarrow \mu_\lambda^{+}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}})<\alpha;$$

(2) $a_\lambda^{-}>\alpha \Leftrightarrow \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})>\alpha \Rightarrow \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})>\alpha$;

(3) $a_\lambda^{-}=\alpha \Leftrightarrow$对于任何 $\beta\in(0,\alpha)$，

$$\mu_\lambda^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}}) \geqslant \alpha \geqslant \mu_\lambda^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}});$$

$a_\lambda^{+}=\alpha \Leftrightarrow$对于任何 $\beta\in(0,\alpha)$，

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^-})\geqslant\alpha\geqslant\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{|}}).$$

(4) 特别地，当 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$时，

$$a_\lambda=\alpha\Leftrightarrow\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\geqslant\alpha\geqslant\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}),$$

$$a_\lambda^{|}=\alpha\Leftrightarrow\mu_\lambda^{|}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\geqslant\alpha\geqslant\mu_\lambda^{|}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{|}}).$$

证明

(1) 如果对于任何 $\beta<\alpha$ 都有 $\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^+})\geqslant\alpha$，则

$$a_\lambda^+\geqslant\sup_{\beta\in(0,\alpha)}\beta\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^+})\geqslant\sup_{\beta\in(0,\alpha)}\beta\wedge\alpha=\alpha.$$

另一方面，如果存在 $\beta\in(0,\alpha)$使得 $\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^+})<\alpha$，由定理 9.2.2，对于任何 $\beta\in(0,\alpha)$，我们有

$$a_\lambda^+\leqslant\beta\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^+})<\beta\vee\alpha=\alpha.$$

(2) 如果 $a_\lambda^->\alpha$，则由定理 9.2.2 知

$$\alpha<a_\lambda^-\leqslant\alpha\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})=\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).$$

另一方面，如果 $\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})>\alpha$，则当 $\beta_n\searrow\alpha$ 时由 μ 的下连续性，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta_n}^-})=\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).$$

于是存在 $\alpha_0>\alpha$，使得

$$\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_0}^-})>\alpha.$$

再由定理 9.2.2，我们有

$$a_\lambda\geqslant\alpha_0\wedge\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_0}^-})>\alpha.$$

(3) 由(1)和(2)立得.

(4) 当 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$时，由于对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\lim_{\beta\to\alpha-0}\chi_{F_{\lambda,\beta}^-}=\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-},\quad\lim_{\beta\to\alpha-0}\chi_{F_{\lambda,\beta}^+}=\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{|}},$$

再根据 μ 的上连续性，

$$\lim_{\beta\to\alpha-0}\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}})=\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}),$$

$$\lim_{\beta\to\alpha-0}\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^-})=\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}).$$

从而可以推出，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$a_\lambda^-=\alpha\Leftrightarrow\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\geqslant\alpha\geqslant\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^-}),$$

$$a_\lambda^+=\alpha\Leftrightarrow\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\geqslant\alpha\geqslant\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\bar{\alpha}}^+}).$$

定理 9.2.4 设 $\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\in\widetilde{FM}_-$，

(1) 如果 $\widetilde{f}_1=\widetilde{f}_2$ 在 $\widetilde{A}(\widetilde{A}\in\mathscr{F})$ 上几乎处处成立，μ 是零可加的，则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu.$$

(2) 如果 $\widetilde{f}_1=\widetilde{f}_2$ 在 $\widetilde{A}(\widetilde{A}\in\mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{A})\neq\infty)$ 上伪几乎处处成立，μ 是关于 $\widetilde{A}$ 伪零可加的，则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu.$$

(3) 如果 $\widetilde{f}_1=\widetilde{f}_2$ 在 X 上几乎处处成立，则对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}_0$，$\int_A\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu=\int_A\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu\Leftrightarrow\mu$ 在 $\mathscr{F}_0$ 上是零可加的；

(4) 如果 $\widetilde{f}_1=\widetilde{f}_2$ 在 $A(A\in\mathscr{F}_0$ 且 $\mu(A)\neq\widetilde{\infty})$ 上伪几乎处处成立，则 $\int_A\widetilde{f}_1\mathrm{d}\mu=\int_A\widetilde{f}_2\mathrm{d}\mu\Leftrightarrow\mu$ 是关于 A 伪零可加的.

证明

(1) 由于 $\widetilde{f}_1=\widetilde{f}_2$ 在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处成立，所以

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{f}_1(x)\neq\widetilde{f}_2(x)\}})=0.$$

这样，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{1_{\lambda,\alpha}}})&\leqslant\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{2_{\lambda,\alpha}}\cup\{x;\widetilde{f}_1(x)\neq\widetilde{f}_2(x)\}})\\&=\mu_\lambda((\widetilde{A}\cap\chi_{F_{2_{\lambda,\alpha}}})\cup(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;\widetilde{f}_1(x)\neq\widetilde{f}_2(x)\}}))\\&=\mu_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{2_{\lambda,\alpha}}})\end{aligned}$$

$$\leqslant \mu_{\lambda}^{-}((\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{1_{\lambda,\alpha}}}) \cup (\widetilde{A} \cap \chi_{\{x;\widetilde{f}_1(x) \neq \widetilde{f}_2(x)\}})$$

$$= \mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{1_{\lambda,\alpha}}}).$$

同理可证

$$\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{1_{\lambda,\alpha}}}) \leqslant \mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{2_{\lambda,\alpha}}}) \leqslant \mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{1_{\lambda,\alpha}}}).$$

故

$$\mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{1_{\lambda,\alpha}}}) = \mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{2_{\lambda,\alpha}}}),$$

及

$$\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{1_{\lambda,\alpha}}}) = \mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{2_{\lambda,\alpha}}}).$$

因此

$$\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_2 \mathrm{d}\mu.$$

(2) 类似(1) 可证.

(3) 由(1)可知,我们只须证明必要性. 事实上,对于任何 $E,F \in \mathscr{F}_0$ 且 $\mu(F)=0$,我们定义

$$\widetilde{f}_1(x) = \begin{cases} \infty, & \text{当 } x \in E. \\ 0, & \text{当 } x \notin E. \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_2(x) = \begin{cases} \infty, & \text{当 } x \in E \cup F. \\ 0, & \text{当 } x \notin E \cup F. \end{cases}$$

则$\{x;\widetilde{f}_1(x) \neq \widetilde{f}_2(x)\} = \{x;\widetilde{f}_1(x)=0$,且$\widetilde{f}_2(x)=\infty\} \subset F$,从而

$$0 \leqslant \mu(\{x;\widetilde{f}_1(x) \neq \widetilde{f}_2(x)\}) \leqslant \mu(F) = 0.$$

即$\widetilde{f}_1=\widetilde{f}_2$ 在 X 上几乎处处成立. 再从

$$\int_X \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu = \int_X \widetilde{f}_2 \mathrm{d}\mu,$$

及

$$\int_X \widetilde{f}_1 \mathrm{d}\mu = \mu(E),$$

和

$$\int_X \widetilde{f}_2 \mathrm{d}\mu = \mu(E \cup F),$$

知

$$\mu(E \cup F) = \mu(E).$$

(4) 类似(3)可证.

推论 9.2.2 设 $\widetilde{A},\widetilde{B} \in \mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{B})=0$,如果 μ 是零可加的,则对于任何 $\widetilde{f} \in \widetilde{FM_+}$,我们有

$$\int_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\mathrm{d}\mu.$$

证明 由定理 9.2.4(1)立得.

定理 9.2.5 设 $\widetilde{f} \in \widetilde{FM_+}$,

(1) 如果 μ 是零可减的,则对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B} \in \mathscr{F}$ 且 $\mu(\widetilde{B})=0$,我们有

$$\int_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\mathrm{d}\mu;$$

(2) 如果 μ 是伪零可减的,则对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B} \in \mathscr{F}$,且 $\mu(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c)=\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty}$,我们有

$$\int_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}^c} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\mathrm{d}\mu.$$

证明

(1) 由于 $\mu(\widetilde{B})=0$,根据 μ 是零可减的,对于任何 $\lambda \in (0,1]$,$\alpha \in (0,\infty)$,我们有

$$\mu_\lambda^-((\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c) \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) = \mu_\lambda^-((\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}}) \cap \widetilde{B}^c)$$
$$-\mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

及

$$\mu_\lambda^+((\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^c) \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) = \mu_\lambda^+((\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) \cap \widetilde{B}^c)$$

$$= \mu_\lambda^- (\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^1}).$$

故

$$\int_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}} \widetilde{f} \, d\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} d\mu.$$

(2) 类似可证.

9.3 模糊值模糊可测函数的模糊值模糊积分序列的收敛

本节,我们假设$(X, \mathscr{F}, \mu)$是模糊值模糊测度空间,$\widetilde{FM}_+ = \{\widetilde{f}; \widetilde{f} \in \widetilde{FM}, \widetilde{f}(x) \geq 0, x \in X\}$.

定义 9.3.1 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}$, $\{\widetilde{f}_n\} \subset \widetilde{FM}$, $\widetilde{f} \in \widetilde{FM}$, 称$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上 F-平均收敛于$\widetilde{f}$,如果对于任何 $\lambda \in (0,1]$一致成立,

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} |f_{n_\lambda}^- - f_\lambda^-| d\mu = 0$$

和

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} |f_{n_\lambda}^+ - f_\lambda^+| d\mu = 0.$$

其中

$$\int_{\widetilde{A}} f d\mu = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [\sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^- (\widetilde{A} \cap \chi_{F_\alpha}),$$
$$\sup_{\alpha \in [0,\infty]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+ (\widetilde{A} \cap \chi_{F_\alpha}), f \in FM].$$

定理 9.3.1 F-平均收敛等价于依模糊值模糊测度 μ 收敛.

证明 设$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上 F-平均收敛于$\widetilde{f}$,但$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上不依模糊值模糊测度 μ 收敛干$\widetilde{f}$,则存在 $\lambda_0 \in (0,1]$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 > \delta_0 > 0$ 及序列$\{n_i\}$使得

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x \mid |f_{n_{i_{\lambda_0}}}(x) - f_{\lambda_0}(x)| \geq \varepsilon_0\}}) \nless \delta_0, \qquad (9.3.1)$$

或

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:|f^{+}_{n_{\epsilon_{\lambda_0}}}(x)-f^{+}_{\lambda_0}(x)|\geqslant\epsilon_0\}})\not<\delta_0. \qquad (9.3.2)$$

不妨设(9.3.1)成立.因此,存在$\lambda_1\in(0,1]$使得

$$\mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:|f^{-}_{n_{\epsilon_{\lambda_0}}}(x)-f^{-}_{\lambda_0}(x)|\geqslant\epsilon_0\}})>\delta_0. \qquad (9.3.3)$$

因为$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上F-平均收敛于$\widetilde{f}$,对于上述$\epsilon_0>0$及$\delta_0>0$,存在$N>0$,当$n\geqslant N$时,对于$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\int_{\widetilde{A}}|f^{-}_{n_\lambda}-f^{-}_{\lambda}|\mathrm{d}\mu<\delta_0,$$

及

$$\int_{\widetilde{A}}|f^{+}_{n_\lambda}-f^{+}_{\lambda}|\mathrm{d}\mu<\delta_0.$$

故,对于$\lambda_0\in(0,1]$,我们有

$$\int_{\widetilde{A}}|f^{-}_{n_{\lambda_0}}-f^{-}_{\lambda_0}|\mathrm{d}\mu<\delta_0.$$

这样,

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:|f^{-}_{n_{\lambda_0}}(x)-f^{-}_{\lambda_0}(x)|\geqslant\alpha\}})\leqslant\delta_0,$$

从而

$$\epsilon_0\wedge\mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:|f^{-}_{n_{\lambda_0}}(x)-f^{-}_{\lambda_0}(x)|\geqslant\epsilon_0\}})\leqslant\delta_0.$$

故

$$\mu^{+}_{\lambda_1}(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x:|f^{-}_{n_{\lambda_0}}(x)-f^{-}_{\lambda_0}(x)|\geqslant\epsilon_0\}})\leqslant\delta_0.$$

这与(9.3.3)相矛盾!这样,我们就证明了$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$.

反之,如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$,则对于任何$\delta>0,0<\epsilon<\delta$,存在$n_0\geqslant1$使得当$n\geqslant n_0$时,对于$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x; |f^-_{n_\lambda}(x) - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}}) < \delta,$$

及

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x; |f^+_{n_\lambda}(x) - f^+_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}}) < \delta.$$

因此，当 $n \geq n_0$ 时，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu^-_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x; |f^-_{n_\lambda}(x) - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}})$$

$$\leq \varepsilon \vee \mu^-_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x; |f^-_{n_\lambda}(x) - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}}) \leq \varepsilon \vee \delta = \delta,$$

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu^+_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x; |f^-_{n_\lambda}(x) - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}})$$

$$\leq \varepsilon \vee \mu^+_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{\{x; |f^-_{n_\lambda}(x) - f^-_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}}) \leq \varepsilon \vee \delta = \delta.$$

从而，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\int_{\widetilde{A}} |f^-_{n_\lambda} - f^-_\lambda| \mathrm{d}\mu \leq \delta.$$

同理可证，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\int_{\widetilde{A}} |f^+_{n_\lambda} - f^+_\lambda| \mathrm{d}\mu \leq \delta.$$

故 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上 F-平均收敛于 $\widetilde{f}$.

定义 9.3.2 设 $\{\widetilde{f}_n\} \subset \widetilde{FM_+}$，$\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，称 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上 F-平均基本的，如果对于任何 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立，

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \int_{\widetilde{A}} |f^-_{n_\lambda} - f^-_{m_\lambda}| \mathrm{d}\mu^-_\lambda = 0,$$

及

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \int_{\widetilde{A}} |f^+_{n_\lambda} - f^+_{m_\lambda}| \mathrm{d}\mu^+_\lambda = 0.$$

定理 9.3.2 F-平均基本等价于依模糊值模糊测度 μ 基本.

证明 对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，令

$$\widetilde{E}_{n,m} = \widetilde{A} \cap \chi_{\{x; |f_{n_\lambda}(x) - f_{m_\lambda}(x)| \geq \varepsilon\}},$$

则

$$\int_{\widetilde{A}}|f_{n_\lambda}^- - f_{m_\lambda}^-|\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_{n,m}}|f_{n_\lambda}^- - f_{m_\lambda}^-|\mathrm{d}\mu \geqslant \epsilon \wedge \mu(\widetilde{E}_{n,m}),$$

再由$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上F平均基本的知，对于$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\epsilon \wedge (\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{E}_{n,m}) \leqslant (\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\int_{\widetilde{A}}|f_{n_\lambda}^- - f_{m_\lambda}^-|\mathrm{d}\mu = 0.$$

故，对于$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{E}_{n,m}) = 0.$$

同理可证，对于$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\mu(\widetilde{A}\cap \chi_{\{x\mid |f_{n_\lambda}^+(x)-f_{m_\lambda}^+(x)|\geqslant\epsilon\}}) = 0.$$

从而，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度μ基本的.

反之，类似于定理 9.3.1 可证.

定理 9.3.3 （下单调收敛定理）设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上单调增加，且收敛于$\widetilde{f}$，$\left\{\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$，则$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$存在，且

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上单调增加，且收敛于$\widetilde{f}$，则对于任何n，$\widetilde{f}_n\leqslant\widetilde{f}$，由性质 9.2.2，

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu,$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

现在，我们假设

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu < \int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu,$$

换句话说，

$$\sup_{n\geqslant 1}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

因此，存在 $\lambda_0\in(0,1]$使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n\lambda_0,\alpha}})$$

$$<\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha}}),\qquad(9.3.1)$$

或

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{n\lambda_0,\alpha}})$$

$$<\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha}}),\qquad(9.3.2)$$

我们不妨设(9.3.1)是真的，由实数的稠密性，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n\lambda_0,\alpha}})$$

$$<\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha}})-\varepsilon_0.$$

再由实数的上确界定义知，存在 $\alpha_0\in(0,\infty)$使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n\lambda_0,\alpha}})$$

$$<\alpha_0\wedge\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}})-\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$=\left(\alpha_0-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\wedge\left(\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}})-\frac{\varepsilon_0}{2}\right).$$

所以，对于任何 $n\geqslant 1$，

$$\alpha_0\wedge\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n\lambda_0,\alpha_0}})<\left(\alpha_0-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\wedge\left(\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}})-\frac{\varepsilon_0}{2}\right).$$

由此可知，对于任何 $n\geqslant 1$，

$$\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n\lambda_0,\alpha_0}})<\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}})-\frac{\varepsilon_0}{2}.\qquad(9.3.3)$$

另一方面，因为$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上单调增加且收敛于$\widetilde{f}$，则对于 $\lambda_0\in(0,1]$，$\alpha_0\in(0,\infty)$，我们有

$$\widetilde{A} \cap \chi_{F_{n_{\lambda_0, \alpha_0}}} \nearrow \widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda_0, \alpha_0}}.$$

因此，由 μ 的下连续性，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{n_{\lambda_0, \alpha_0}}}) = \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda_0, \alpha_0}}).$$

从而

$$\lim_{n \to \infty} \mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{n_{\lambda_0, \alpha_0}}}) = \mu_{\lambda_0}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda_0, \alpha_1}}),$$

即，对于上述 $\varepsilon_0 > 0$，存在 $N \geqslant 1$，当 $n \geqslant N$ 时，

$$\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{n_{\lambda_0, \alpha_0}}}) > \mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda_0, \alpha_0}}) - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

这与(9.3.3)相矛盾！这个矛盾说明

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu.$$

推论 9.3.1 设 $\{\widetilde{f}_n\} \subset \widetilde{FM_+}$，$\widetilde{f} \in \widetilde{FM_+}$，$\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，如果对于任何 $\widetilde{B} \in \mathscr{F}$，$\left\{\int_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu\right\} \in A^*$，则

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处单调增加，且收敛于$\widetilde{f}$，μ 是零可减的，则 $(\widetilde{\rho}) \lim\limits_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu$ 存在，且

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu;$$

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上是伪几乎处处单调增加，且收敛于$\widetilde{f}$，μ 是关于 $\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty})$伪零可减的，则 $(\widetilde{\rho}) \lim\limits_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu$ 存在，且

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu.$$

证明

(1) 因为$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处单调增加，且收敛于$\widetilde{f}$，所以，存在 $D \subset X$ 且 $\chi_D \in \mathscr{F}$，$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_D) = 0$ 使得$\{\widetilde{f}_n\}$，在 $\widetilde{A} \cap \chi_{D^c}$ 上处处单

调增加，且收敛于$\widetilde{f}$，则由定理 9.3.3 知

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}\cap\chi_D^{\prime}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}\cap\chi_D^{\prime}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

再由定理 9.2.5，

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}\cap\chi_D^{\prime}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_{\widetilde{A}\cap\chi_D^{\prime}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

(2) 同理可证.

定理 9.3.4 （上单调收敛定理）设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上单调减小且收敛于$\widetilde{f}$，以及存在$n_0$使得对于任何$\lambda\in(0,1]$，$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n_{0_\lambda},\bar{0}}})\neq\widetilde{\infty}$和$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{n_{0_\lambda},\bar{0}}})\neq\widetilde{\infty}$，和$\left\{\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$，则$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$存在，且

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 因为$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上单调减小且收敛于$\widetilde{f}$，则对于任何n，$\widetilde{f}_n\geqslant\widetilde{f}$，因此

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

现在我们假定

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu>\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

换句话说

$$\inf_{n\geqslant1}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu>\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

因此，存在 $\lambda_0\in(0,1]$ 使得

$$\inf_{n\geq 1}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda_0,\alpha}}^-})$$

$$>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}),\qquad(9.3.4)$$

或

$$\inf_{n\geq 1}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda_0,\alpha}}^+})$$

$$>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_r}^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^+}),\qquad(9.3.5)$$

成立，我们不妨设(9.3.4)成立. 再由实数的稠密性，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\inf_{n\geq 1}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda_0,\alpha}}^-})$$

$$>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\wedge\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-})+\varepsilon_0,$$

因此，对于任何 $n\geqslant 1$，

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda_0,\alpha}}^-})$$

$$>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-})+\varepsilon_0.$$

再由上确界定义，存在 $\alpha_0\in(0,\infty)$，使得

$$\alpha_0\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda_0,\alpha_0}}})$$

$$>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-})+\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\geqslant\alpha_0\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-})+\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$=\left(\alpha_0+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\wedge\left(\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-})+\frac{\varepsilon_0}{2}\right),$$

从而

$$\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda_0,\alpha_0}}^-})>\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-})+\frac{\varepsilon_0}{2}.\qquad(9.3.6)$$

另一方面，因为 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上单调减小，且收敛于 $\widetilde{f}$，则对于 λ_0

$\in(0,1]$，$\alpha_0\in(0,\infty)$，我们有

$$\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n\lambda_0,\alpha_0}}\searrow\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}}.$$

因此，由 μ 的上连续性

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n\lambda_0,\alpha_0}})=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}}),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n\lambda_0,\alpha_0}})=\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}}).$$

即，对于上述 $\varepsilon>0$，存在 $N\geqslant1$，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n\lambda_0,\alpha_0}})<\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}})+\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

这与(9.3.6)相矛盾！这个矛盾说明

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

推论 9.3.2 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，且 $\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{F}$，$\left\{\int_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\right\}\in\widetilde{A}^*$，则

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上几乎处处单调减小，且收敛于$\widetilde{f}$，μ 是零可减的，则 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$ 存在，且

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu;$$

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪几乎处处单调减小，且收敛于$\widetilde{f}$，μ 是关于 $\widetilde{A}$ 伪零可减的，则 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$ 存在，且

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 利用定理 9.3.4 和定理 9.2.5 类似推论 9.3.1 可证.

结合定理 9.3.3 和定理 9.3.4，我们有

定理 9.3.5 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，且 $\mu(\widetilde{A})\neq$

$\widetilde{\infty}$，如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上收敛于$\widetilde{f}$，以及$\left\{\int_{\widetilde{A}}\sup_{i\geqslant n}\widetilde{f}_i\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*\left\{\int_{\widetilde{A}}\inf_{i\geqslant n}\widetilde{f}_i\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$，则$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$存在，且

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明　分别记

$$f_n^*=\sup_{n\geqslant i}\widetilde{f}_i\quad\text{和}\quad f_{n_*}=\inf_{n\geqslant i}\widetilde{f}_i.$$

由定理 8.1.7 知$f_n^*\in\widetilde{FM}_+$，$f_{n_*}\in\widetilde{FM}_+$，$\{f_n^*\}$在$\widetilde{A}$上单调减小，且收敛于$\widetilde{f}$，$\{f_{n_*}\}$在$\widetilde{A}$上单调增加，且收敛于$\widetilde{f}$.
因此

$$\int_{\widetilde{A}}f_{n_*}\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}f_n^*\mathrm{d}\mu.$$

故

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}f_{n_*}\mathrm{d}\mu&\leqslant(\widetilde{\rho})\varliminf_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\varlimsup_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}f_n^*\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

再由定理 9.3.3 和定理 9.3.4 知，

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}f_{n_*}\mathrm{d}\mu&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}f_n^*\mathrm{d}\mu\\&=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

推论 9.3.3　设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，且$\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty}$，如果对于任何$\widetilde{B}\in\mathscr{F}$，

则 $\left\{\int_{\widetilde{A}\cap B}\inf_{n\geqslant i}\widetilde{f}_i\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$，$\left\{\int_{\widetilde{A}\cap B}\sup_{n\geqslant i}\widetilde{f}_i\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*$，

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，μ是零可减的，则$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$存在，且

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu;$$

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪几乎处处收敛于$\widetilde{f}$，且μ是关于$\widetilde{A}$伪零可减的，则$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$存在，且

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 类似推论9.3.2可证.

定理9.3.6 (法都引理)设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，如果

$$\widetilde{f}=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\inf\widetilde{f}_n\quad\text{及}\quad\left\{\int_{\widetilde{A}}\inf_{i\geqslant n}\widetilde{f}_i\mathrm{d}\mu\right\}\in A^*.$$

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\inf\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\neq\widetilde{\infty},$$

则

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\inf\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

证明 令$\widetilde{g}_n=\inf_{i\geqslant n}\widetilde{f}_i$，则$\widetilde{g}_n\leqslant\widetilde{f}_n$，且$\{\widetilde{g}_n\}$是单调增加且收敛于$\widetilde{f}$. 从而

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

因此

$$\int_{\widetilde{A}}\widetilde{g}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\inf_{i\geqslant n}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_i\mathrm{d}\mu.$$

所以，由定理9.3.4，我们有

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\int_{\tilde{A}} \tilde{g}_n \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geqslant n}\int_{\tilde{A}} \tilde{f}_i \mathrm{d}\mu.$$

对偶地,我们有

定理 9.3.7 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$,$\tilde{f}\in\widetilde{FM}_+$,$\tilde{A}\in\mathscr{F}$,且 $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$,如果

$$\tilde{f} = (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \sup \tilde{f}_n$$

及

$$\left\{\int_{\tilde{A}} \sup_{i\geqslant n} \tilde{f}_i \mathrm{d}\mu\right\} \in A^*,$$

则

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu \geqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \sup_n \int_{\tilde{A}} \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu.$$

证明 类似定理 9.3.6 可证.

推论 9.3.4 设$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$,$\tilde{f}\in\widetilde{FM}_+$,$\tilde{A}\in\mathscr{F}$,且 $\mu(\tilde{A})\neq\tilde{\infty}$,如果

$$\left\{\int_{\tilde{A}} \inf_{i\geqslant n} \tilde{f}_i \mathrm{d}\mu\right\} \in A^*,$$

$$\left\{\int_{\tilde{A}} \sup_{i\geqslant n} \tilde{f}_i \mathrm{d}\mu\right\} \in A^*,$$

则

$$\int_{\tilde{A}} ((\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geqslant n} \tilde{f}_i) \mathrm{d}\mu \leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geqslant n} \int_{\tilde{A}} \tilde{f}_i \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \sup_{i\geqslant n} \int_{\tilde{A}} \tilde{f}_i \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \int_{\tilde{A}} ((\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \sup_{i\geqslant n} \tilde{f}_i) \mathrm{d}\mu.$$

证明 结合定理 9.3.6 和定理 9.3.7 立得.

定理 9.3.8 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}_+$, $\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$, $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,

(1) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$,且μ是自连续的,则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu;$$

(2) 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上伪依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$,且μ是关于 $\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$伪自连续的,则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明

(1) 对于任意给定的$\epsilon>0$,因为$\{\widetilde{f}_n\}$在 $\widetilde{A}$ 上依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$,则对于任何$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\epsilon\}})=0,$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\epsilon\}})=0.$$

对于任何$\alpha\in(0,\infty)$,我们能够证明

$$F_{n_{\lambda,\alpha+2\epsilon}}^-\subset F_{\lambda,\alpha+\epsilon}^-\cup\{x;|f_{n_\lambda}(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\epsilon\},$$

及

$$F_{n_{\lambda,\alpha+2\epsilon}}^+\subset F_{\lambda,\alpha+\epsilon}^+\cup\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\epsilon\}.$$

因此,由μ的上自连续性,

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha+\epsilon}})\cup(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda(x)|\geqslant\epsilon\}})$$
$$=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha+\epsilon}^-}),$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu((\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha+\epsilon}^+})\cup(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\epsilon\}})$$
$$=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha+\epsilon}^+}).$$

所以，存在 $n_0 \geqslant 1$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{n_{\lambda,\alpha+2\varepsilon}}}) \leqslant \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha+\varepsilon}}) + \varepsilon,$$

及

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{n_{\lambda,\alpha+2\varepsilon}}}) \leqslant \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha+\varepsilon}}) + \varepsilon.$$

因此，当 $n \geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立，

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} (\alpha + 2\varepsilon) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{n_{\lambda,\alpha+2\varepsilon}}})$$

$$\leqslant \sup_{\alpha \in (0,\infty)} (\alpha + \varepsilon) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha+\varepsilon}}) + \varepsilon.$$

即

$$\sup_{\alpha \in (2\varepsilon,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{n_{\lambda,\alpha}}}) \leqslant \sup_{\alpha \in (\varepsilon,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda(\widetilde{A} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}) + \varepsilon.$$

同理可证，当 $n \geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\sup_{\alpha \in (2\varepsilon,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{n_{\lambda,\alpha}}}) \leqslant \sup_{\alpha \in (\varepsilon,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) + \varepsilon.$$

从而

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \int_A \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

另一方面，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，$\alpha \in (0,\infty)$，我们有

$$F^-_{n_{\lambda,\alpha-2\varepsilon}} \supset F_{\lambda,\alpha-\varepsilon} \cap \{x; |f_{n_\lambda}(x) - f_\lambda^-(x)| \geqslant \varepsilon\}^c,$$

及

$$F^+_{n_{\lambda,\alpha-2\varepsilon}} \supset F^+_{\lambda,\alpha-\varepsilon} \cap \{x; |f^+_{n_\lambda}(x) - f_\lambda^+(x)| \geqslant \varepsilon\}^c.$$

因此，由 μ 的下自连续性，

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha-\varepsilon} \cap \{x; |f_{n_\lambda}(x) - f_\lambda^-(x)| \geqslant \varepsilon\}^c}),$$

$$= \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha-\varepsilon}}),$$

及

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha-\varepsilon} \cap \{x; |f^+_{n_\lambda}(x) - f_\lambda^+(x)| \geqslant \varepsilon\}^c}),$$

$$= \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha-\varepsilon}}).$$

所以，存在 $n_0 \geqslant 1$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda,\alpha-2\varepsilon}}})\geqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha-\varepsilon}})+\varepsilon,$$

及

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^{+}_{n_{\lambda,\alpha-2\varepsilon}}})\geqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha-\varepsilon}})-\varepsilon.$$

因此，当 $n\geqslant n_0$ 时对于 $\lambda\in(0,1]$ 一致成立

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{n_{\lambda,\alpha}}})&=\sup_{\alpha\in(2\varepsilon,\infty)}(\alpha-2\varepsilon)\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n_{\lambda,\alpha-2\varepsilon}}})\\&\geqslant\sup_{\alpha\in(2\varepsilon,\infty)}(\alpha-\varepsilon)\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha-\varepsilon}})-\varepsilon\\&=\sup_{\alpha\in(\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})-\varepsilon.\end{aligned}$$

同理可有，当 $n\geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda\in(0,1]$ 一致成立

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{n_{\lambda,\alpha}}})\geqslant\sup_{\alpha\in(\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})-\varepsilon.$$

从而

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\geqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

结合两方面，我们证明了

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$，则对于任何 $\lambda\in(0,1]$ 一致成立

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|<\varepsilon\}})=\mu(\widetilde{A}),$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f^+_{n_\lambda}(x)-f^+_\lambda(x)|<\varepsilon\}})=\mu(\widetilde{A}).$$

对于任何 $\alpha\in(0,\infty)$，我们能够证明

$$F^-_{n_{\lambda,\alpha+2\varepsilon}}\subset F^-_{\lambda,\alpha+\varepsilon}\cup\{x;|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|<\varepsilon\}^c,$$

及

$$F^+_{n_{\lambda,\alpha+2\varepsilon}}\subset F^+_{\lambda,\alpha+\varepsilon}\cup\{x;|f^+_{n_\lambda}(x)-f^+_\lambda(x)|<\varepsilon\}^c.$$

因此，由 μ 关于 $\widetilde{A}$ 伪上自连续性，

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha+\varepsilon}\cup\{x;|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|<\varepsilon\}^c})$$
$$=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha+\varepsilon}}),$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha+\varepsilon}\cup\{x;|f^+_{n_\lambda}(x)-f^+_\lambda(x)|<\varepsilon\}^c})$$
$$=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha+\varepsilon}}).$$

所以，存在 $n_0\geqslant 1$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda\in(0,1]$ 一致成立

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha+2\varepsilon}})\leqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha+\varepsilon}})+\varepsilon,$$

及

$$\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{n_{\lambda,\alpha+2\varepsilon}}})\leqslant\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha+\varepsilon}})+\varepsilon.$$

从而，当 $n\geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda\in(0,1]$ 一致成立

$$\sup_{\alpha\in(2\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{n_{\lambda,\alpha}}})\leqslant\sup_{\alpha\in(\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})+\varepsilon,$$

及

$$\sup_{\alpha\in(2\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{n_{\lambda,\alpha}}})\leqslant\sup_{\alpha\in(\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_\lambda(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})+\varepsilon.$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

另一方面，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in(0,\infty)$，我们有

$$F^-_{n_{\lambda,\alpha-2\varepsilon}}\supset F^-_{\lambda,\alpha-\varepsilon}\cap\{x;|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|<\varepsilon\},$$

及

$$F^+_{n_{\lambda,\alpha-2\varepsilon}}\supset F^+_{\lambda,\alpha-\varepsilon}\cap\{x;|f^+_{n_\lambda}(x)-f^+_\lambda(x)|<\varepsilon\}.$$

因此，由 μ 关于 $\widetilde{A}$ 伪下自连续性，

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha-\varepsilon}\cap\{x;|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|<\varepsilon\}})$$
$$=\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha-\varepsilon}}),$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha-\varepsilon}\cap\{x;|f^+_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|<\varepsilon\}})$$

$$= \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha-\epsilon}}).$$

所以，存在 $n_0 \geqslant 1$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{n_{\lambda,\alpha-2\epsilon}}}) \geqslant \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{\lambda,\alpha-\epsilon}}) - \epsilon,$$

及

$$\mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{n_{\lambda,\alpha-2\epsilon}}}) \geqslant \mu(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha-\epsilon}}) - \epsilon.$$

从而，当 $n \geqslant n_0$ 时，对于 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{n_{\lambda,\alpha}}}) \geqslant \sup_{\alpha \in (\epsilon,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda}^{-}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{-}_{\lambda,\alpha}}) - \epsilon,$$

及

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{n_{\lambda,\alpha}}}) \geqslant \sup_{\alpha \in (\epsilon,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{A} \cap \chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}) - \epsilon.$$

故

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu.$$

结合两方面，我们证明了

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu.$$

推论 9.3.5 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，$\{\widetilde{f}_n\} \subset \widetilde{FM_+}$，$\widetilde{f} \in \widetilde{FM_+}$，

(1) 如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$，μ 是自连续的，则

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu;$$

(2) 如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上强伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于 $\widetilde{f}$，μ 是关于 $\widetilde{A}(\mu(\widetilde{A}) \neq \widetilde{\infty})$ 伪自连续的，则

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu.$$

证明 显然.

推论 9.3.6 设 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，$\{\widetilde{f}_n\} \subset \widetilde{FM_+}$，$\widetilde{f} \in \widetilde{FM_+}$，如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在

$\widetilde{A}$ 上 F-平均收敛于$\widetilde{f}$，μ 是自连续的，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

定理 9.3.9 设$(X,\mathscr{F}_0,\mu)$是模糊值模糊测度空间，

(1) 如果对于任何$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM_+}$在任何 $A\in\mathscr{F}_0$ 上依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{x}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{x}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\Leftrightarrow\mu\text{ 是自连续的；}$$

(2) 如果对于任何$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM_+}$在任何 $A\in\mathscr{F}_0(\mu(\widetilde{A})\neq\widetilde{\infty})$上伪依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\Leftrightarrow\mu\text{ 关于 }\widetilde{A}\text{ 伪自连续的.}$$

证明

(1) 由定理 9.3.8(1)，我们只须证明必要性即可. 事实上，对于任何的 $A\in\mathscr{F}_0$，$\{B_n\}\subset\mathscr{F}_0$，且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n)=0$，

如果存在 $M>0$，使得 $\mu(\widetilde{A})\leqslant M$，我们定义

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}M, & \text{当 } x\in A.\\ 0, & \text{当 } x\notin A.\end{cases}$$

$$\widetilde{f}_n(x)=\begin{cases}M, & \text{当 } x\in A\triangle B_n.\\ 0, & \text{当 } x\notin A\triangle B_n,\ n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

显然，对任意给定的 $\varepsilon>0$，

$$\mu(\{x;|\widetilde{f}_n(x)-\widetilde{f}(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\mu(B_n)\to 0,\ (n\to\infty),$$

即$\{\widetilde{f}_n\}$在 X 上依模糊值模糊测度 μ 收敛于$\widetilde{f}$.

因此，由定理的假设

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{x}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int_{x}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

又由于

$$\int_X \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \mu(A \triangle B_n) \wedge M,$$

及

$$\int_X \tilde{f}\, \mathrm{d}\mu = \mu(A) \wedge M = \mu(A),$$

从而

$$\begin{aligned}\mu(A) &= (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}(\mu(A \triangle B_n) \wedge M) \\ &= M \wedge (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(A \triangle B_n),\end{aligned}$$

故

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(A \triangle B_n) = \mu(A).$$

即 μ 是自连续的.

如果 $\mu(A)=\tilde{\infty}$. 我们只须证明

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\mu(A \cap B_n^c) = \mu(A).$$

对于任何给定充分大的 $N>0$,我们定义

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} N+1, & \text{当 } x \in A. \\ 0, & \text{当 } x \notin A. \end{cases}$$

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} N+1, & \text{当 } x \in A \cap B_n^c. \\ 0, & \text{当 } x \notin A \cap B_n^c,\ n = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

显然,$\{\tilde{f}_n\}$ 在 X 上依模糊测度 μ 收敛于 $\tilde{f}$,因此,由定理假设,我们有

$$(\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty}\int_X \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu = \int_X \tilde{f}\, \mathrm{d}\mu.$$

又因为

$$\int_X \tilde{f}\, \mathrm{d}\mu = (N+1) \wedge \mu(A),$$

及

$$\int_X \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu = (N+1) \wedge \mu(A \cap B_n^c),\ n = 1,2,\cdots,$$

故

$$(N+1)\wedge\mu(A)=(N+1)\wedge(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(A\cap B_n^c).$$

又由 $\mu(A)=\widetilde{\infty}$ 知，存在 $\lambda_0\in(0,1]$ 使得 $\mu_{\lambda_0}^+(A)>N+1$，从而

$$N+1=(N+1)\wedge\lim_{n\to\infty}\mu_{\lambda_0}^+(A\cap B_n^c).$$

这样

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{\lambda_0}^-(A\cap B_n^c)\geqslant N+1.$$

也就是说，存在 $n_0\geqslant1$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$\mu_{\lambda_0}^+(A\cap B_{n_0}^c)\geqslant N.$$

再由 $\widetilde{\infty}$ 的定义知

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(A\cap B_n^c)=\widetilde{\infty}=\mu(A).$$

(2) 类似可证.

定理 9.3.10 设 $\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM_+}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，如果 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 $\widetilde{A}$ 上一致收敛于 $\widetilde{f}$，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 由性质 9.2.11 即得.

引理 9.3.1 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，对于任何 $E\in\mathscr{F}_0$，我们定义

$$\mu^*(E)\triangleq\mu(\widetilde{A}\cap\chi_E),$$

如果 μ 是具有 $FM1$、$FM2$ 的模糊值模糊集函数，则 μ^* 是具有 $FM1$、$FM2$ 的模糊值集函数；如果 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的模糊值模糊测度，则 μ^* 是 $\mathscr{F}_0$ 上的模糊值模糊测度.

证明

(1) $\mu^*(\varnothing)=\mu(\widetilde{A}\cap\varnothing)=\mu(\varnothing)=0$.

(2) 对于任何 $E,F\in\mathscr{F}_0$，且 $E\subset F$，则由

$$\widetilde{A}\cap\chi_E\subset\widetilde{A}\cap\chi_F,$$

及 μ 的单调性知

$$\mu^*(E) = \mu(\tilde{A} \cap \chi_E) \leqslant \mu(\tilde{A} \cap \chi_F) = \mu^*(F).$$

(3) 对于任何$\{E_n\} \subset \mathscr{F}_0$，如果$E_1 \subset E_2 \subset \cdots$，则

$$\tilde{A} \cap \chi_{E_n} \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{A} \cap \chi_{E_n}).$$

再由μ的下连续性

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{A} \cap \chi_{E_n})\right) \\ &= (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu(\tilde{A} \cap \chi_{E_n}) \\ &= (\tilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n).\end{aligned}$$

(4) 同理可证.

定理 9.3.11 设$\tilde{A} \in \mathscr{F}$，$\tilde{f} \in \widetilde{FM_+}$，则对于任何$E \in \mathscr{F}_0$，

$$\int_E \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu^* = \int_{\tilde{A} \cap \chi_E} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu,$$

特别地，

$$\int_{\tilde{A}} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu = \int_X \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu^*.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{A} \cap \chi_E} \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\tilde{A} \cap \chi_E \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\ &\qquad \sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\tilde{A} \cap \chi_E \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big] \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\tilde{A} \cap \chi_E \cap F_{\lambda,\alpha}^-), \\ &\qquad \sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\tilde{A} \cap \chi_E \cap F_{\lambda,\alpha}^+)\Big] \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^{*-}(E \cap F_{\lambda,\alpha}^-), \\ &\qquad \sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^{*+}(E \cap F_{\lambda,\alpha}^+)\Big] \\ &= \int_E \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

定理 9.3.12 设$\tilde{A} \in \mathscr{F}$，$\mu(\tilde{A}) \neq \tilde{\infty}$.

(1) 如果对于任何$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM_+}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\widetilde{f}$，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\Leftrightarrow\mu^*\text{ 是自连续的；}$$

(2) 如果对于任何$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM_+}$，$\widetilde{f}\in\widetilde{FM_+}$，$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上伪依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\widetilde{f}$，则

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu\Leftrightarrow\mu^*\text{ 是关于 }X\text{ 伪自连续的.}$$

证明

(1) 必要性. 对于任何$E\in\mathscr{F}_0$，因为$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$，所以，对于任意给定的$\varepsilon>0$，对于$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|\geqslant\varepsilon\}})=0,$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{A}\cap\chi_{\{x;|f^+_{n_\lambda}(x)-f^+_\lambda(x)|\geqslant\varepsilon\}})=0.$$

所以

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(E\cap\chi_{\{x;|f^-_{n_\lambda}(x)-f^-_\lambda(x)|\geqslant\varepsilon\}})=0,$$

及

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu^*(E\cap\chi_{\{x;|f^+_{n_\lambda}(x)-f^+_\lambda(x)|\geqslant\varepsilon\}})=0,$$

即$\{\widetilde{f}_n\}$在E上依模糊值模糊测度μ^*收敛于$\widetilde{f}$，而且有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_X\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu^*=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu$$
$$=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\int_x\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu^*.$$

再由定理 9.3.9(1)知μ^*是自连续的.

充分性. 如果$\{\widetilde{f}_n\}$在$\widetilde{A}$上依模糊值模糊测度μ收敛于$\widetilde{f}$，由上

述证明知，$\{\tilde{f}_n\}$在 X 上依模糊值模糊测度 μ^* 收敛于$\tilde{f}$，这样，由 μ^* 的自连续性，我们有

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_A \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu=(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_X \tilde{f}_n \mathrm{d}\mu^*$$

$$=\int_X \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu^*=\int_A \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

（2）类似可证.

第 10 章　模糊值模糊积分定义模糊值模糊测度

10.1　模糊值模糊积分定义模糊值模糊测度

本节,我们假设$(X,\mathscr{F},\mu)$是模糊值模糊测度空间,$\tilde{f}\in\widetilde{FM}$..

定义 10.1.1　我们定义模糊值模糊集函数 $\eta_{\tilde{f}}:\mathscr{F}\to\mathscr{F}_+^*(R)$为

$$\eta_{\tilde{f}}(\tilde{E})=\int_{\tilde{E}}\tilde{f}\mathrm{d}\mu,\qquad(\tilde{E}\in\mathscr{F}),\qquad(10.1.1)$$

由$\tilde{f}$和 μ 定义的模糊值模糊集函数 $\eta_{\tilde{f}}$ 在不发生误会的情况下,我们只记为 η.

命题 10.1.1　由$\tilde{f}$和 μ 定义的模糊值模糊集函数 η 有如下性质:

(1) 对于任何 $\lambda\in(0,1],\alpha\in(0,\infty)$,

$$\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\leqslant\eta_\lambda^-(\tilde{E})\leqslant\alpha\vee\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\leqslant\eta_\lambda^+(\tilde{E})\leqslant\alpha\vee\mu_\lambda^+(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+});$$

(2) 对于任何 $\tilde{E}\in\mathscr{F},\eta(\tilde{E})\leqslant\mu(\tilde{E})$,特别地 $\eta(\varnothing)=0$;

(3) 如果 $\tilde{E},\tilde{F}\in\mathscr{F}$,且 $\tilde{E}\subset\tilde{F}$,则 $\eta(\tilde{E})\leqslant\eta(\tilde{F})$.

证明

(1) 由定理 9.2.2 立得.

(2) (i)

$$
\begin{aligned}
\eta(\widetilde{E}) &= \int_{\widetilde{E}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\
&\quad \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big] \\
&\leqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E}), \\
&\quad \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E})\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\mu_\lambda^-(\widetilde{E}), \mu_\lambda^+(\widetilde{E})] \\
&= \mu(\widetilde{E}).
\end{aligned}
$$

(ii) 由性质 9.2.1 知 $\eta(\varnothing)=0$.

(3) 由性质 9.2.4 立得.

命题 10.1.2 如果 μ 具有性质

$$\mu(\widetilde{E}) = \mu(\widetilde{F}) = 0 \Rightarrow \mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F}) = 0, \qquad (10.1.2)$$

则 $\mu \ll \eta$ 的充分必要条件是 $\mu(\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)=0\}})=0$.

证明 必要性,因为 $\widetilde{f}(x)=0$ 的充分必要条件是对于任何 $\lambda \in (0,1]$, $f_\lambda^-(x)=f_\lambda^+(x)=0$. 所以

$$
\begin{aligned}
\eta(\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)=0\}}) &= \int_{\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)=0\}}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)=0\}} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\
&\quad \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\chi_{\{x;\widetilde{f}(x)=0\}} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\chi_{\{x;f_\lambda^-(x)=0\}} \cap F_{\lambda,\alpha}^-), \\
&\quad \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\chi_{\{x;f_\lambda^+(x)=0\}} \cap F_{\lambda,\alpha}^+)\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\varnothing), \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\varnothing)\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge 0, \sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge 0\Big] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

因此，由 $\mu\ll\eta$ 知 $\mu(\chi_{\{x;\tilde{f}(x)=0\}})=0$.

充分性. 现在我们假设 $\mu(\chi_{\{x;\tilde{f}(x)=0\}})=0$ 及 $\mu(\widetilde{E})=0$，则存在 $\lambda_0\in(0,1]$ 使得 $\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{E})>0$. 因此，由条件(10.1.2)，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^{+}_{\lambda_0,1/n}})=\mu_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^{+}_{\lambda_0,\bar{0}}})>0.$$

从而存在 $n_0\geqslant1$，使得

$$\mu_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^{+}_{\lambda_0,1/n_0}})>0.$$

这样，由命题10.1.1(1)知

$$\eta_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{E})\geqslant\frac{1}{n_0}\wedge\mu_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^{+}_{\lambda_0,1/n_0}})>0.$$

故 $\eta(\widetilde{E})>0$. 由此可知 $\mu\ll\eta$.

我们记

$$AM=\left\{\tilde{f};\tilde{f}\in\widetilde{FM}_{+},\left\{\int_{\widetilde{E}_n}\tilde{f}\,\mathrm{d}\mu\right\}\in A^{*},\forall\ \{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F},\text{且}\ \widetilde{E}_n\uparrow\ \text{或}\ \widetilde{E}_n\searrow\right\}.$$

定理 10.1.1 设 $\tilde{f}\in AM$，η 是由 $\tilde{f}$ 和 μ 定义的模糊值模糊集函数，则 η 具有下连续性.

证明 设 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $\widetilde{E}_n\uparrow$，我们记

$$\widetilde{E}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n.$$

则对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in(0,\infty)$，我们有

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^{-}_{\lambda,\alpha}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^{-}_{\lambda,\alpha}})$$

和
$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}).$$

再由 μ 的下连续性，我们有

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^{-}_{\lambda,\alpha}})=\mu(\widetilde{E}\cap\chi_{F^{-}_{\lambda,\alpha}}),$$

及

$$(\tilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}})=\mu(\widetilde{E}\cap\chi_{F^{+}_{\lambda,\alpha}}).$$

从而,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$\alpha\in(0,\infty)$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^-(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})=\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\qquad(10.1.3)$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})=\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).\qquad(10.1.4)$$

另一方面,由于 $\widetilde{E}_n\nearrow\widetilde{E}$ 及命题 10.1.1(3),我们有对于任何 n,

$$\eta(\widetilde{E}_n)\leqslant\eta(\widetilde{E}).$$

因此,

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)\leqslant\eta(\widetilde{E}).$$

现在,我们假设

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)<\eta(\widetilde{E}),$$

也就是说,

$$\sup_{n\geqslant1}\eta(\widetilde{E}_n)<\eta(\widetilde{E}).$$

因此,存在 $\lambda_0\in(0,1]$,使得

$$\sup_{n\geqslant1}(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}))<\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}),\qquad(10.1.5)$$

或

$$\sup_{n\geqslant1}(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^+}))<\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^+}).\qquad(10.1.6)$$

我们不妨假设(10.1.6)成立,由实数的稠密性,存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant1}(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}))<\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-})-\varepsilon_0.$$

再由上确界定义知,存在 $\alpha_0\in(0,\infty)$ 使得

$$\sup_{n\geqslant1}(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^-}))<\alpha_0\wedge\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\varepsilon_0}^-})-\frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$= \left(\alpha_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \wedge \left(\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\right).$$

因此，对于任何 $n \geqslant 1$，

$$\alpha_0 \wedge \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}) < \left(\alpha_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \wedge \left(\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\right).$$

故

$$\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}) < \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}) - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

从而，由(10.1.3)，我们有

$$\begin{aligned}\mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}}) &= (\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}}) \\ &\leqslant \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \\ &< \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}}).\end{aligned}$$

这是矛盾的，这个矛盾说明

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n\to\infty} \eta(\widetilde{E}_n) = \eta(\widetilde{E}) = \eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n\right).$$

对于给定的 μ，我们记

$$\widetilde{FM}(\mu) = \{\widetilde{f}: \widetilde{f} \in AM, \mu(\chi_{\{x:\alpha \leqslant f_\lambda^-(x) < \beta\}}) \neq \widetilde{\infty}, \mu(\chi_{\{x:\alpha \leqslant f_\lambda^+(x) < \beta\}}) \neq \widetilde{\infty},$$
$$\forall \lambda \in (0,1], 0 < \alpha < \beta\}$$

显然，如果 $\mu(x) \neq \widetilde{\infty}$，则 $\widetilde{FM}(\mu) = AM$.

定义 10.1.2 我们称模糊值模糊测度 μ 是 σ-有限的，如果存在 $\mathscr{F}$ 中的单调增加序列 $\{\widetilde{E}_n\}$ 使得

$$\mu(\widetilde{E}_n) \neq \widetilde{\infty},\ n = 1,2,\cdots, \quad 且 \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n.$$

定理 10.1.2 如果模糊值模糊测度 μ 是 σ-有限的且满足条件

$$\mu(\widetilde{E}) \neq \widetilde{\infty} 和 \mu(\widetilde{F}) \neq \widetilde{\infty} \Rightarrow \mu(\widetilde{E} \cup \widetilde{F}) \neq \widetilde{\infty}, \quad (10.1.7)$$

则下列命题是等价的：

(1) $\tilde{f} \in \widetilde{FM}(\mu)$；

(2) 如果存在 $\tilde{E} \in \mathscr{F}$ 使得，对于任何 $\lambda \in (0,1]$及 $\alpha_\lambda^-, \alpha_\lambda^+ \in (0,\infty)$，

$$\mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_\lambda^-}}) \neq \tilde{\infty} \quad 及 \quad \mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_\lambda^+}}) \neq \tilde{\infty}, \tag{10.1.8}$$

则(10.1.8)对于任何 $\alpha \in (0,\infty)$成立.

(3) η 是一模糊值模糊测度.

证明

(1) ⇒(2) 设$\tilde{f} \in \widetilde{FM}(\mu)$，$\tilde{E} \in \mathscr{F}$，且对于任何 $\lambda \in (0,1]$，α_λ^-，$\alpha_\lambda^+ \in (0,\infty)$，有

$$\mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_\lambda}}) \neq \tilde{\infty} \quad 及 \quad \mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_\lambda^+}}) \neq \tilde{\infty}.$$

则对于任何 $0 < \alpha < \alpha_\lambda^-$，由条件(10.1.7)知，

$$\mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}) \leqslant \mu((\tilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_\lambda^-}}) \cup \chi_{\{x;\alpha \leqslant f_\lambda^- < \alpha_\lambda^-\}}) \neq \tilde{\infty}.$$

再由 μ 的单调性，对于任何 $\alpha \geqslant \alpha_\lambda^-$

$$\mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}) \leqslant \mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_\lambda^-}}) \neq \tilde{\infty}.$$

故(2)成立.

(2)⇒(1)假设(2)成立且对于 $\lambda_0 \in (0,1]$及某个 $\alpha_1 > \alpha_0 > 0$ 有

$$\mu(\chi_{\{x;\alpha_0 \leqslant f_{\lambda_0}^- < \alpha_1\}}) = \tilde{\infty}.$$

我们令

$$\tilde{E} = \chi_{\{x|\alpha_0 \leqslant f_{\lambda_0}^- < \alpha_1\}}.$$

则，我们有

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_1}}) &= \mu(\chi_{\{x;\alpha_0 \leqslant \tilde{f}_{\lambda_0}^- < \alpha_1\}} \cap \chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_1}}) \\ &= \mu(\chi_{\{x;\alpha \leqslant \tilde{f}_{\lambda_0}^- < \alpha_1\} \cap \{x;\tilde{f}_{\lambda_0}^-(x) \geqslant \alpha_1\}})\end{aligned}$$

$$=\mu(\varnothing)=0.$$

再由(2)知

$$\mu(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}})\neq\widetilde{\infty}.$$

但是

$$\mu(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}})=\mu(\chi_{\{x|\alpha_0\leqslant\widetilde{f}^-_{\lambda_0}<\alpha_1\}\cap\{x|\widetilde{f}^-_{\lambda_0}(x)\geqslant\alpha_0\}})$$

$$=\mu(\chi_{\{x|\alpha_0\leqslant\widetilde{f}^-_{\lambda_0}<\alpha_1\}})=\widetilde{\infty},$$

这样产生了矛盾，这一矛盾说明对于任何 $\lambda\in(0,1]$ $0<\alpha<\beta$，

$$\mu(\chi_{\{x|\alpha\leqslant\widetilde{f}^-_\lambda<\beta\}})\neq\widetilde{\infty}.$$

同理可证

$$\mu(\chi_{\{x|\alpha\leqslant f^+_\lambda(x)<\beta\}})\neq\widetilde{\infty},$$

即$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\mu)$.

(2)⇒(3) 设$\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$ 且 $\widetilde{E}_1\supset\widetilde{E}_2\supset\cdots$和 $\eta(\widetilde{E}_1)\neq\widetilde{\infty}$. 由定理 9.2.1 知，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，存在 $\alpha^-_\lambda,\alpha^+_\lambda\in(0,\infty)$，使得 $\mu(\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha^+_\lambda}})\neq\widetilde{\infty}$，及 $\mu(\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha^-_\lambda}})\neq\widetilde{\infty}$，再由(2)对于任何 $\alpha>0$，

$$\mu(\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\neq\widetilde{\infty}\quad\text{及}\quad\mu(\widetilde{E}_1\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\neq\widetilde{\infty}$$

我们令 $\widetilde{E}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n$，则我们有

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),$$

及

$$\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}).$$

因此，由 μ 的上连续性，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mu^-_\lambda(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})=\mu^-_\lambda(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\tag{10.1.9}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})=\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}).\qquad(10.1.10)$$

另一方面，由命题 10.1.1 知，对于任何 $n\geqslant 1$，

$$\eta(\widetilde{E}_n)\geqslant\eta(\widetilde{E}).$$

因此

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)\geqslant\eta(\widetilde{E}).$$

换句话说，

$$\inf_{n\geqslant 1}\eta(\widetilde{E}_n)\geqslant\eta(\widetilde{E}).$$

从而，存在 $\lambda_0\in(0,1]$，使得

$$\inf_{n\geqslant 1}(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha}}))>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_{\lambda_0}(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}}),\qquad(10.1.11)$$

或

$$\inf_{n\geqslant 1}(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha}}))>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha}}).\qquad(10.1.12)$$

我们不妨设(10.1.12)成立. 由实数的稠密性，存在 $\varepsilon_0>0$，使得

$$\inf_{n\geqslant 1}(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha}}))$$
$$>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha}})+\varepsilon_0.$$

因此，存在 $\alpha_0\in(0,\infty)$，使得

$$\inf_{n\geqslant 1}(\alpha_0\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_0}}))+\frac{\varepsilon_0}{2}$$
$$>\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha}})+\varepsilon_0.$$

从而，对于任何 $n\geqslant 1$，

$$\alpha_0\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_0}})-\frac{\varepsilon_0}{2}>\alpha_0\wedge\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda_0,\alpha_0}}).$$

即

$$\left(\alpha_0-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\wedge\left(\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_0}})-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$$

$$>\alpha_0 \wedge \mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}).$$

故

$$\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}) - \frac{\varepsilon_0}{2} > \mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}).$$

再由(10.1.10)知,

$$\begin{aligned}\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}) &\leqslant \lim_{n\to\infty}\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \\ &= \mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \\ &< \mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}).\end{aligned}$$

这是矛盾的,这个矛盾说明 η 具有上连续性,再由命题 10.1.1 和定理 10.1.1 知 η 是模糊值模糊测度.

(3)→(2)如果(2)不成立. 则存在 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,存在 $\lambda_\lambda^-,\lambda_\lambda^+\in(0,1]$,使得

$$\mu(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^-}}) \neq \widetilde{\infty} \quad \text{及} \quad \mu(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_\lambda^+}^+}) \neq \widetilde{\infty}.$$

但是存在 $\lambda_0\in(0,1]$及 $\alpha_0<\alpha_{\lambda_0}^-$,或 $\alpha_1<\alpha_{\lambda_0}^-$,使得

$$\mu(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^-}) = \widetilde{\infty}, \tag{10.1.13}$$

或

$$\mu(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_1}^+}) = \widetilde{\infty}. \tag{10.1.14}$$

由定理 9.2.1 知,$\eta(\widetilde{E})\neq\widetilde{\infty}$. 我们不妨设(10.1.14)成立. 所以,存在 $\lambda_1\in(0,1]$,使得对于任何 $M>0$,

$$\mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_1}^+}) \geqslant M.$$

如果 $\lambda_1<\lambda_0$,则由 $f_{\lambda_1}^+(x)\geqslant f_{\lambda_0}^+(x)$知,

$$\mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_1,\alpha_1}^+}) \geqslant \mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_1}^+}).$$

从而

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda_1,\alpha}}) \geqslant \alpha_1 \wedge \mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda_1,\alpha_1}})$$

$$\geqslant \alpha_1 \wedge M > 0.$$

如果 $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$，则

$$\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \geqslant \mu_{\lambda_1}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}).$$

从而

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \geqslant \alpha_1 \wedge \mu_{\lambda_0}^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}})$$

$$\geqslant \alpha_1 \wedge M > 0.$$

故，我们总有 $\eta(\widetilde{E})>0$.

我们取 $\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$，使得 $\widetilde{E}_n \cap \widetilde{E}_m = \varnothing$，$m\neq n$，$m,n=1,2,\cdots$ 及

$$\widetilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}_n \quad \text{和} \quad \mu(\widetilde{E}_n) \neq \widetilde{\infty}, n = 1,2,\cdots.$$

我们令 $\widetilde{F}_n = \bigcup\limits_{m=n}^{\infty}\widetilde{E}_m$，则 $\widetilde{F}_1 \supset \widetilde{F}_2 \supset \cdots$，以及

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{F}_n\right)(x) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\widetilde{E}_m\right)(x)$$

$$= \inf_{n\geqslant 1}\sup_{m\geqslant n}\widetilde{E}_m(x).$$

如果存在 $x_0\in X$ 使得 $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{F}_n\right)(x_0)>0$，则

$$\inf_{n\geqslant 1}\sup_{m\geqslant n}\widetilde{E}_m(x_0) > 0.$$

所以，对于任何 $n\geqslant 1$，$\sup\limits_{m\geqslant n}\widetilde{E}_m(x_0)>0$. 因此，存在 $\varepsilon(n)>0$，使得

$$\sup_{m\geqslant n}\widetilde{E}_m(x_0) > \varepsilon(n) > 0.$$

再由上确界定义，存在 $m_n\geqslant n$，使得

$$\widetilde{E}_{m_n}(x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon(n) > \sup_{m\geqslant n}\widetilde{E}_m(x_0) > \varepsilon(n).$$

故

$$\widetilde{E}_{m_n}(x_0) > \frac{1}{2}\varepsilon(n) > 0.$$

这样，对于任何 n_1, n_2，我们有

$$(\widetilde{E}_{m_{n_1}} \cap \widetilde{E}_{m_{n_2}})(x_0) = \widetilde{E}_{m_{n_1}}(x_0) \wedge \widetilde{E}_{m_{n_2}}(x_0) > 0.$$

因此，$\widetilde{E}_{m_{n_1}} \cap \widetilde{E}_{m_{n_2}} \neq \varnothing$. 这与$\{\widetilde{E}_n\}$的选取相矛盾！这个矛盾说明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{F}_n = \varnothing$.

另一方面，因为 $\widetilde{E} = \widetilde{F}_n \cup \bigcup_{m=1}^{n-1} \widetilde{E}_m$，所以

$$(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) = (\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{n-1} (\widetilde{E}_m \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \right).$$

这样，由 $\mu(\widetilde{E}_n) \neq \widetilde{\infty}$及条件(10.1.7)知，

$$\mu(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) = \widetilde{\infty},\ n = 1,2,\cdots.$$

故对于任意给定 $\epsilon > 0$，存在 $\lambda_n \in (0,1)$，使得

$$\mu^+_{\lambda_n}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \geqslant M, \quad n = 1,2,\cdots.$$

如果 $\lambda_n < \lambda_0$，则

$$\mu^+_{\lambda_n}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_n,\alpha_1}}) \geqslant \mu^+_{\lambda_n}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \geqslant M.$$

如果 $\lambda_n \geqslant \lambda_0$，则

$$\mu^+_{\lambda_0}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \geqslant \mu^+_{\lambda_n}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\alpha_1}}) \geqslant M.$$

从而，对于任何 $n \geqslant 1$，存在 $\lambda'_0 \in (0,1]$，使得

$$\mu^+_{\lambda'_0}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda'_0,\alpha_1}}) > M.$$

因此

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \eta(\widetilde{F}_n) > 0.$$

事实上，如果$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \eta(\widetilde{F}_n) = 0$，则对于任意给定的 $\alpha_1 > \epsilon > 0$，存在 $N \geqslant 1$，使得当 $n \geqslant N$ 时，对于任何 $\lambda \in (0,1]$一致成立

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu^+_{\lambda}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) < \epsilon.$$

从而，对于任何 $\lambda \in (0,1]$，我们有

$$\alpha_1 \wedge \mu^+_{\lambda}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_1}}) < \epsilon, \qquad (n \geqslant N).$$

故

$$\mu_{\lambda}^{+}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_1}^{+}}) < \varepsilon, \qquad (n \geqslant N).$$

特别是

$$\mu_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{F}_n \cap \chi_{F_{\lambda_0,\alpha_1}^{+}}) < \varepsilon, \qquad (n \geqslant N),$$

这是矛盾的！这样，我们就证明了

$$(\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \eta(\widetilde{F}_n) > 0 = \eta(\varnothing) = \eta(\bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{F}_n).$$

但是这又与假设相矛盾！至此，我们完成了该定理的证明.

推论 10.1.1 设$(X, \mathscr{F}, \mu)$是模糊值模糊测度空间，$\widetilde{f} \in AM$，如果 μ 是满足(10.1.7)式的 σ-有限模糊值模糊测度，则由$\widetilde{f}$和 μ 定义的模糊值模糊集函数 η，一个模糊值模糊测度的充分必要条件是$\widetilde{f} \in \widetilde{FM}(\mu)$.

推论 10.1.2 设$(X, \mathscr{F}, \mu)$是一个有限模糊值模糊测度空间，$\widetilde{f} \in AM$，则由$\widetilde{f}$和 μ 定义的模糊值模糊集函数 η 一定是一个模糊值模糊测度.

定理 10.1.3 设 μ 是 σ-有限的模糊值模糊测度，$\widetilde{f} \in \widetilde{FM}(\mu)$，则对于任何 $\widetilde{g} \in \widetilde{FM}_{+}$，且 $\widetilde{g}(x) \leqslant \widetilde{f}(x)$ $(x \in X)$，有

$$\int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\eta. \quad (\widetilde{E} \in \mathscr{F}), \tag{10.1.15}$$

进一步地，η 是满足(10.1.15)式的最小模糊值模糊测度.

证明

(1) 因为对于任何 $\widetilde{E} \in \mathscr{F}$，$\eta(\widetilde{E}) \leqslant \mu(\widetilde{E})$，所以

$$\int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\eta \leqslant \int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\mu.$$

反之，我们有

$$\int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\eta = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \eta_{\lambda}(\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\alpha}^{-}}),$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \eta_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\alpha}^+})]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge (\sup_{\beta\in(0,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^-((\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\alpha}^-}) \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^-})),$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge (\sup_{\beta\in(0,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^+((\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\alpha}^+}) \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^+}))]$$

$$\geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge (\sup_{\beta\in[\alpha,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^-((\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\beta}^-}) \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^-})),$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge (\sup_{\beta\in[\alpha,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^+((\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\beta}^+}) \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^+}))]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge (\sup_{\beta\in[\alpha,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\beta}^-})),$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge (\sup_{\beta\in[\alpha,\infty)} \beta \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\beta}^+}))]$$

$$\geqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{G_{\lambda,\beta}^+})]$$

$$= \int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\mu.$$

故

$$\int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{g} \mathrm{d}\eta.$$

(2) 如果 ν 是另一个满足(10.1.15)式的模糊值模糊测度，则对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$，

$$\eta(\widetilde{E}) = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{f} \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{E}} \widetilde{f} \mathrm{d}\nu \leqslant \nu(\widetilde{E}).$$

故 η 是满足(10.1.15)式的最小模糊值模糊测度.

命题 10.1.3 设 $\eta_n: \mathscr{F} \to \mathscr{F}_1^*(R)$, $n=1,2,\cdots$,如果对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\eta_n(\widetilde{A})\}\in A^*$,则$\{\eta_n\}$在 $\mathscr{F}$ 上一致收敛的充分必要条件是$\{\eta_n\}$是 $\mathscr{F}$ 上的基本列.

证明 类似命题 5.4.1 可证.

定理 10.1.4 设$\{\widetilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\mu)$,如果$\{\widetilde{f}_n\}$是在 X 上一致基本的,且对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\{\widetilde{f}_n(\widetilde{A})\}\in A^*$,则存在一个模糊值模糊集

函数 η 使得对于每个 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$ 有

$$\eta(\widetilde{E}) = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

进一步地，如果 μ 是 σ-有限且满足(10.1.7)式，则 η 是模糊值模糊测度.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $\{\widetilde{f}_n\}$ 在 X 上是一致基本的，则存在 $N>0$，当 $n,m\geqslant N$ 时，对于任何的 $x\in X$，一致成立

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}_m(x))<\varepsilon.$$

由性质 9.2.11，对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$，

$$\widetilde{\rho}\left(\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu,\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_m\mathrm{d}\mu\right)\leqslant 2\varepsilon,$$

即

$$\widetilde{\rho}(\eta_n(\widetilde{A}),\eta_m(\widetilde{A}))\leqslant 2\varepsilon.$$

也就是说，$\{\eta_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 上的一致基本列. 因此，由命题 10.1.3，存在 $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{F}_+^*(R)$ 使得对于每一个 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$，有

$$\eta(\widetilde{A}) = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_n(\widetilde{A}) = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}_n\mathrm{d}\mu.$$

下面我们证明 η 是一模糊值模糊测度，η 满足 $FM1$，$FM2$ 是显然的，我们只须证明 η 满足 $FM3$ 和 $FM4$.

(1) 任取 $\widetilde{A}_m\in\mathscr{F}$，$m=1,2,\cdots$，且 $\widetilde{A}_1\subset\widetilde{A}_2\subset\cdots$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $\{\eta_n\}$ 在 $\mathscr{F}$ 上一致收敛于 η，则存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{F}$，有

$$\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{B}),\eta_n(\widetilde{B}))<\varepsilon/3.$$

再由定理 10.1.1，存在 $M_{N+1}>0$，当 $m\geqslant M_{N+1}$ 时，

$$\widetilde{\rho}(\eta_{N+1}(\widetilde{A}_m),\eta_{N+1}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m))<\varepsilon/3.$$

所以

$$\widetilde{\rho}(\eta(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m),\eta(\widetilde{A}_m))\leqslant\widetilde{\rho}(\eta(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m),\eta_{N+1}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m))$$

$$+\widetilde{\rho}(\eta_{N+1}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m),\eta_{N+1}(\widetilde{A}_m))$$

$$+\widetilde{\rho}(\eta_{N+1}(\widetilde{A}_m),\eta(\widetilde{A}_m))$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta(\widetilde{A}_m)=\eta(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m).$$

即 η 满足 $FM3$.

(2) 任取 $\widetilde{A}_m\in\mathscr{F}$, $m=1,2,\cdots$, $\widetilde{A}_1>\widetilde{A}_2>\cdots$, 如果 $\eta(\widetilde{A}_1)\neq\widetilde{\infty}$, 则存在 $N_1>0$, 当 $n\geqslant N_1$ 时, $\eta_n(\widetilde{A}_1)\neq\widetilde{\infty}$. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\geqslant N_1$, 当 $n\geqslant N$ 时, 由命题 10.1.3 对于任何 $\widetilde{B}\in\mathscr{F}$, 有

$$\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{B}),\eta_n(\widetilde{B}))<\varepsilon/3.$$

再根据定理 10.1.2, 由于 $\widetilde{f}_{N+1}\in\widetilde{FM}(\mu)$ 及 μ 具有 σ-有限性及满足 (10.1.7), 存在 $M_{N+1}>0$, 当 $n\geqslant M_{N+1}$ 时,

$$\widetilde{\rho}(\eta_{N+1}(\widetilde{A}_m),\eta_{N+1}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m))<\varepsilon/3,$$

所以

$$\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{A}_m),\eta(\bigcup_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m))\leqslant\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{A}_m),\eta_{N+1}(\widetilde{A}_m))$$

$$+\widetilde{\rho}(\eta_{N+1}(\widetilde{A}_m),\eta_{N+1}(\bigcap_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m))$$

$$+\widetilde{\rho}(\eta_{N+1}(\bigcap_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m),\eta(\bigcap_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m))$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta(\widetilde{A}_m)=\eta(\bigcap_{m=1}^{\infty}\widetilde{A}_m).$$

即 η 满足 $FM4$, 从而我们证明了 η 是一模糊值模糊测度.

定理 10.1.5 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是σ-有限的满足(10.1.7)的一致自连续的模糊值模糊测度空间,$\{\tilde{f}_n\}\subset FM(\mu)$,$f\in\widetilde{FM}_+$,如果$\{\tilde{f}_n\}$在$X$上依模糊值模糊测度$\mu$收敛于$\tilde{f}$,则$\tilde{f}\in\widetilde{FM}(\mu)$,且$\eta_f$是$\mathscr{F}$上的模糊值模糊测度.

证明 由于$\{\tilde{f}_n\}$在X上依模糊值模糊测度μ收敛于$\tilde{f}$,所以,对于任意给定的$\varepsilon>0,\delta>0$,存在$N>0$,当$n\geqslant N$时,对于任何$\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\mu(\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\}})<\delta,$$

及

$$\mu(\chi_{\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\varepsilon\}})<\delta.$$

又由于对于任何$0<\alpha<\beta$,

$$\{x;\alpha\leqslant f_\lambda^-(x)<\beta\}\subset\{x;\alpha-\varepsilon\leqslant f_{n_\lambda}^-(x)<\beta+\varepsilon\}\\ \cup\{x;|f_{n_\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)|\geqslant\varepsilon\},$$

及

$$\{x;\alpha\leqslant f_\lambda^+(x)<\beta\}\subset\{x;\alpha-\varepsilon\leqslant f_{n_\lambda}^+(x)<\beta+\varepsilon\}\\ \cup\{x;|f_{n_\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)|\geqslant\varepsilon\}.$$

所以,根据μ是一致自连续的,我们有

$$\mu(\chi_{\{x;\alpha\leqslant f_\lambda^-(x)<\beta\}})\leqslant\mu(\chi_{\{x;\alpha-\varepsilon\leqslant f_{n_\lambda}^-(x)<\beta+\varepsilon\}})+\delta,$$

及

$$\mu(\chi_{\{x;\alpha\leqslant f_\lambda^+(x)<\beta\}})\leqslant\mu(\chi_{\{x;\alpha-\varepsilon\leqslant f_{n_\lambda}^+(x)<\beta+\varepsilon\}})+\delta.$$

再由$\{\tilde{f}_n\}\subset\widetilde{FM}(\mu)$知

$$\mu(\chi_{\{x;\alpha\leqslant f_\lambda^+(x)<\beta\}})\neq\tilde{\infty},$$

$$\mu(\chi_{\{x;\alpha\leqslant f_\lambda^-(x)<\beta\}})\neq\tilde{\infty}.$$

即$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\mu)$. 从而,由定理 10.1.2,$\eta_{\widetilde{f}}$是一个模糊值模糊测度.

定理 10.1.6 设$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}_+$,如果 $\mu_n(n=1,2,\cdots)$是一列一致基本的模糊值模糊集函数,且对于任何 $\widetilde{A}$, $\left\{\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n\right\}\in A^*$,则由

$$\eta_n(\widetilde{A})=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n\quad(\widetilde{A}\in\mathscr{F})$$

定义的$\{\eta_n\}$是一致基本的. 进一步地,如果 $\mu_n(n=1,2,\cdots)$是 σ-有限满足(10.1.7)式的模糊值模糊测度,且$\widetilde{f}\in\widetilde{FM}(\mu_n)$,则存在 η: $\mathscr{F}\to\mathscr{F}_+^*(R)$,使得

$$\eta(\widetilde{A})=(\widehat{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_n(\widetilde{A}),$$

且 η 是模糊值模糊测度.

证明 因为$\{\mu_n\}$是一致基本的,所以,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n,m\geqslant N$ 时,对于任何 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\lambda\in(0,1]$,$\alpha\in(0,\infty)$一致成立

$$\widetilde{\rho}(\mu_m(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\mu_n(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}))<\varepsilon,$$

及

$$\widetilde{\rho}(\mu_m(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}),\mu_n(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}))<\varepsilon.$$

从而

$$\begin{aligned}\mu_{n_\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})-\varepsilon&\leqslant\mu_{m_\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})\\&\leqslant\mu_{n_\lambda}(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})+\varepsilon,\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\mu_{n_\lambda}^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\quad\varepsilon&\leqslant\mu_{m_\lambda}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\\&\leqslant\mu_{n_\lambda}^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})+\varepsilon.\end{aligned}$$

因此,

$$\eta_m(\widetilde{A})=\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_m$$

$$= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{m_\lambda}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{m_\lambda}^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]$$

$$\leqslant \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [\sup_{\alpha \in (0,\infty)} (\alpha \wedge (\mu_{n_\lambda}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}}) + \varepsilon)],$$

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} (\alpha \wedge \mu_{n_\lambda}^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) + \varepsilon))]$$

$$\leqslant \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda [\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{n_\lambda}^-(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\sup_{\alpha \in (0,\infty)} \alpha \wedge \mu_{n_\lambda}^+(\widetilde{A} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})] + \varepsilon$$

$$= \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, d\mu_n + \varepsilon = \eta_n(\widetilde{A}) + \varepsilon.$$

另一方面，我们也有

$$\eta_m(\widetilde{A}) = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, d\mu_m \geqslant \int_{\widetilde{A}} \widetilde{f} \, d\mu_n - \varepsilon = \eta_n(\widetilde{A}) - \varepsilon.$$

结合两方面，我们得到

$$\eta_n(\widetilde{A}) - \varepsilon \leqslant \eta_m(\widetilde{A}) \leqslant \eta_n(\widetilde{A}) + \varepsilon.$$

故$\{\eta_n\}$是一列一致基本的. 由命题 10.1.3，存在 $\eta: \mathscr{F} \to \mathscr{F}_+^*(R)$，使得对于任何 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}$，

$$\eta(\widetilde{A}) = (\widetilde{\rho}) \lim_{n \to \infty} \eta_n(\widetilde{A})$$

类似定理 10.1.4 的证明，我们可以得到 η 是模糊值模糊测度.

10.2 由模糊值模糊积分定义的模糊值模糊集函数的遗传性

本节，我们假设$(X, \mathscr{F})$是模糊可测空间，μ 是具有 $FM1$，$FM2$ 的 σ-有限模糊值模糊集函数，$\widetilde{f} \in \widetilde{FM_+}$，$\eta$ 是由(10.1.1)定义的模糊值模糊集函数.

定理 10.2.1 如果 μ 是 F-可加的，则 η 也是 F-可加.

证明 因为 μ 是 F-可加的，所以，对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}$，

$$\mu(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A})\vee\mu(\widetilde{B}).$$

所以，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})=\mu_\lambda^-(\widetilde{A})\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{B})$$

和

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})=\mu_\lambda^+(\widetilde{A})\vee\mu_\lambda^+(\widetilde{B}).$$

再由对于任何实值函数 h 和 g，我们有

$$\sup_\alpha(h(\alpha)\vee g(\alpha))=(\sup_\alpha h(\alpha))\vee(\sup_\alpha g(\alpha)).$$

所以，对于任何 $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}$，

$$\begin{aligned}
\eta(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}) &= \int_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-((\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}), \\
&\quad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+((\widetilde{A}\cup\widetilde{B})\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-((\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\cup(\widetilde{B}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})), \\
&\quad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+((\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\cup(\widetilde{B}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}))] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge(\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})), \\
&\quad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge(\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\vee\mu_\lambda^-(\widetilde{B}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}))] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}(\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})) \\
&\quad \vee(\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{B}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})),\sup_{\alpha\in(0,\infty)}(\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) \\
&\quad \vee(\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{B}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}))] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{A}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})) \\
&\quad \vee(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{B}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})), \\
&\quad (\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{A}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})) \\
&\quad \vee(\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{B}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}))]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{\widetilde{A}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \vee \int_{\widetilde{B}} \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \\
&=\eta(\widetilde{A}) \vee \eta(\widetilde{B}).
\end{aligned}
$$

定理 10.2.2

(1) 如果 μ 是零可加的，则 η 也是零可加的；

(2) 如果 μ 是零可减的，则 η 也是零可减的.

证明

(1) 设 $\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{F}$ 且 $\eta(\widetilde{F})=0$. 则由性质 9.2.3，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha>0$，我们有

$$
\mu_\lambda^-(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})=0 \quad \text{和} \quad \mu_\lambda^+(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})=0.
$$

因此，由 μ 是零可加的，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in(0,\infty)$，

$$
\begin{aligned}
\mu_\lambda^-((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})&=\mu_\lambda^-((\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})\cup(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})) \\
&=\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),
\end{aligned}
$$

及

$$
\mu_\lambda^+((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})=\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}).
$$

故

$$
\begin{aligned}
\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})&=\int_{\widetilde{E}\cup\widetilde{F}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \\
&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\
&\quad\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})] \\
&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\
&\quad\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})] \\
&=\int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu=\eta(\widetilde{E}).
\end{aligned}
$$

(2) 类似可证.

定理 10.2.3

(1) 如果 μ 是次可加的，则 η 也是次可加的；

(2) 如果 μ 是次可减的，则 η 也是次可减的.

证明

(1) 因为 μ 是次可加的，所以，对于任何 $\widetilde{E},\widetilde{F}\in\mathscr{F}$，

$$\mu(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\mu(\widetilde{E})+\mu(\widetilde{F}).$$

又因为对于任何实数 a,b,c，有

$$a\wedge(b+c)\leqslant a\wedge b+a\wedge c,$$

所以，

$$\begin{aligned}
\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F}) &= \int_{\widetilde{E}\cup\widetilde{F}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\
&\qquad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big] \\
&= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-((\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\cup(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})), \\
&\qquad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+((\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\cup(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}))\Big] \\
&\leqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge[\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})+\mu_\lambda^-(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})], \\
&\qquad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge[\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})+\mu_\lambda^+(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]\Big] \\
&\leqslant \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}) \\
&\qquad +\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}), \\
&\qquad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) \\
&\qquad +\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\Big] \\
&= \int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu+\int_{\widetilde{F}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu \\
&= \eta(\widetilde{E})+\eta(\widetilde{F}),
\end{aligned}$$

即 η 是次可加的.

(2) 类似可证.

定义 10.2.1 设 $\eta:\mathscr{F}\to\mathscr{F}_+^*(R)$ 是一个模糊值模糊集函数，

$\alpha\in R$,我们称 η 关于 α 具有(SG)性质,如果存在 $\tilde{E}\in\mathscr{F}$,使得 $\eta(\tilde{E})>\alpha$,则 $\eta_{\bar{0}}^{-}(\tilde{E})>\alpha$.

引理 10.2.1 设 η 关于 $0\in R$ 具有(SG)性质,如果 $0<\eta(\tilde{E})\neq\widetilde{\infty}$,则存在 $a,b\in R$ 使得 $0<2a\leqslant\eta(\tilde{E})\leqslant b<+\infty$,且

$$\eta(\tilde{E}) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[2a,b]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\sup_{\alpha\in[2a,b]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]$$

证明 因为 $\eta(\tilde{E})>0$,根据定义 10.2.1,

$$\eta_{\bar{0}}^-(\tilde{E})>0.$$

再由实数的稠密性,存在 $\varepsilon_0>0$,使得

$$\eta_{\bar{0}}^-(\tilde{E})>\varepsilon_0>0,$$

从而,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,$\eta_\lambda^-(\tilde{E})>\varepsilon_0$,因此,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,由定理 9.2.3(2)知

$$\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\varepsilon_0}^-})>\varepsilon_0.$$

故

$$c_{\varepsilon_0}=\inf_{\lambda\in(0,1]}\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\varepsilon_0}^-})\geqslant\varepsilon_0,$$

我们记

$$0<2a=\varepsilon_0\wedge c_{\varepsilon_0}.$$

则对于任何 $\lambda\in(0,1]$

$$2a\leqslant\varepsilon_0\wedge\mu_\lambda^-(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\varepsilon_0}^-}).$$

又因为 $\eta(\tilde{E})\neq\widetilde{\infty}$,所以,存在 $M>0$,使得对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$\eta_\lambda^+(\tilde{E})<M.$$

再由定理 9.2.3(1)知,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,我们有

$$\mu_\lambda^+(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,M}^+})<M.$$

故

$$c_M=\sup_{\lambda\in(0,1]}\mu_\lambda^+(\tilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,M}^+})\leqslant M.$$

我们记

$$\frac{1}{2}b = M \vee c_M < +\infty.$$

再应用定理 9.2.2,我们得到

$$0 < 2a \leqslant \eta(\widetilde{E}) \leqslant \frac{1}{2}b < b < +\infty$$

和

$$2a \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,c_0}}) \leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,2a}}).$$

所以

$$2a = 2a \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,2a}}) \quad 及 \quad 2a = 2a \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,2a}}).$$

因此

$$\sup_{\alpha\in(0,2a)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}) \leqslant 2a \leqslant \sup_{\alpha\in[2a,b]} \alpha \wedge \mu_\lambda(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),$$

及

$$\sup_{\alpha\in(0,2a)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) \leqslant 2a \leqslant \sup_{\alpha\in[2a,b]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}).$$

另一方面,因为 $b>M$,所以,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$\begin{aligned}\mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,b}}) &\leqslant \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,M}}) \\ &\leqslant M \vee \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,M}}) \\ &\leqslant \frac{1}{2}b \leqslant b.\end{aligned}$$

因此,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,

$$b \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,b}}) = \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,b}}).$$

所以

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in(b,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) &\leqslant \sup_{\alpha\in(b,\infty)} \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) \\ &\leqslant \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,b}}) \\ &= b \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,b}}) \\ &\leqslant \sup_{\alpha\in[2a,b]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}).\end{aligned}$$

我们还可以证明，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，

$$\sup_{\alpha\in(b,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\leqslant\sup_{\alpha\in[2a,b]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}}).$$

这样，

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{E})&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,2a)}\alpha\wedge\mu_\lambda(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\\&\qquad\vee\sup_{\alpha\in[2a,b]}\alpha\wedge\mu_\lambda(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-})\vee\sup_{\alpha\in(b,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in(0,2a)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\vee\sup_{\alpha\in[2a,b]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})\\&\qquad\vee\sup_{\alpha\in(b,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[2a,b]}\alpha\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in[2a,b]}\alpha\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].\end{aligned}$$

引理 10.2.2 设 η 关于 $0\in R$ 具有 (SG) 性质，如果 $0<\eta(\widetilde{E})\neq\widetilde{\infty}$，$a,b$ 是由引理 10.2.1 给定的，对于任何 $m\geqslant1$，我们令

$$\alpha_k=k(b-a)/m+a,\ k=0,1,2,\cdots,m,$$

$$\eta_m^U(\widetilde{E})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\max_{0\leqslant k\leqslant m-1}\alpha_{k+1}\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^-}),$$

$$\max_{0\leqslant k\leqslant m-1}\alpha_{k+1}\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^+})]$$

和

$$\eta_m^L(\widetilde{E})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\max_{0\leqslant k\leqslant m-1}\alpha_k\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_{k+1}}^-}),$$

$$\max_{0\leqslant k\leqslant m-1}\alpha_k\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_{k+1}}^+})],$$

则

$$\eta(\widetilde{E})=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta_m^U(\widetilde{E})=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta_m^L(\widetilde{E}).$$

证明 对于任何 $\alpha_k\leqslant\alpha\leqslant\alpha_{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots,m-1$，$\lambda\in(0,1]$，我们有

$$\alpha_k \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_{k+1}}}) \leqslant \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})$$

$$\leqslant \alpha_{k+1} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_k}}),$$

及

$$\alpha_k \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_{k+1}}}) \leqslant \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})$$

$$\leqslant \alpha_{k+1} \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_k}}),$$

所以,对于任何 $\lambda \in (0,1]$, $k=0,1,2,\cdots,m-1$,

$$\begin{aligned}(\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^- &= \max_{0\leqslant k\leqslant m-1} \alpha_k \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_{k+1}}}) \\ &\leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m-1} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}) \\ &\leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m-1} \alpha_{k+1} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_k}}) \\ &= (\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^-.\end{aligned}$$

从而,对于任何 $\lambda \in (0,1]$, $m \geqslant 1$,

$$(\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^- \leqslant (\eta(\widetilde{E}))_\lambda^- \leqslant (\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^-.$$

同理可证

$$(\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^+ \leqslant (\eta(\widetilde{E}))_\lambda^+ \leqslant (\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^+.$$

所以,对于任何 $m \geqslant 1$,

$$\eta_m^L(\widetilde{E}) \leqslant \eta(\widetilde{E}) \leqslant \eta_m^U(\widetilde{E}).$$

现在,我们选取充分大的 m 使得 $\alpha_1 < 2a$. 则我们有

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_1}}) \geqslant \alpha_1, \ \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_1}}) \geqslant \alpha_1.$$

事实上,如果 $\mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_1}}) < \alpha_1$,则

$$\eta_\lambda^-(\widetilde{E}) \leqslant \alpha_1 \vee \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_1}}) = \alpha_1 < 2a \leqslant \eta_\lambda^-(\widetilde{E}).$$

这是矛盾的! 故对于某个 $k \geqslant 1$,我们有

$$(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^- = \alpha_{k+1} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha_k}}),$$

及

$$(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^+ = \alpha_{k+1} \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha_k}}).$$

事实上，如果 $k=0$，则

$$(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^- = \alpha_1 \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_0}^-})$$

$$= \alpha_1 \wedge \mu_\lambda(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,a}^-})$$

$$\leqslant \alpha_1 \wedge \mu_\lambda(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_{1/2}}^-})$$

$$\leqslant \alpha_1 \wedge 2\mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_{1/2}}^-})$$

$$= 2\left(\frac{\alpha_1}{2} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_{1/2}}^-}\right)$$

$$\leqslant \alpha_1 < 2a \leqslant \eta_\lambda^-(\widetilde{E}),$$

这是矛盾的. 所以，由 $a \wedge b - a \wedge c \leqslant a \wedge (b-c)$ 知，

$$(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^- - (\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^- = \alpha_{k+1} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^-})$$

$$- \max_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \alpha_k \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_{k+1}}})$$

$$\leqslant \alpha_{k+1} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^-})$$

$$- \alpha_{k-1} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^-})$$

$$\leqslant (\alpha_{k+1} - \alpha_{k-1}) \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^-})$$

$$= \left[\left(\frac{(k+1)(b-a)}{m} + a\right) - \left(\frac{(k-1)(b-a)}{m} + a\right)\right]$$

$$\wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^-})$$

$$= \frac{2(b-a)}{m} \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^-})$$

$$\leqslant \frac{2(b-a)}{m}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $M \geqslant 2(b-a)/\varepsilon$，当 $m \geqslant M$ 时，对于任何 $\lambda \in (0,1]$ 一致成立

$$|(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^- - (\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^-| < \varepsilon.$$

同理可证,对于任何 $\lambda\in(0,1]$,一致成立

$$|(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^+ - (\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^+| < \varepsilon.$$

即,对于 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\lim_{m\to\infty}(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^- = \lim_{m\to\infty}(\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^- = \eta_\lambda^-(\widetilde{E})$$

和

$$\lim_{m\to\infty}(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^+ = \lim_{m\to\infty}(\eta_m^L(\widetilde{E}))_\lambda^+ = \eta_\lambda^+(\widetilde{E}).$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_m^U(\widetilde{E}) = (\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta_m^L(\widetilde{E}) = \eta(\widetilde{E}).$$

引理 10.2.3 如果$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)=0$,则对于任何固定的 $\beta>0$,对于任何 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^-}) = (\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^+}) = 0.$$

证明 对于任意固定的 $\beta>0$,我们取 $0<\varepsilon<\beta$,由$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)=0$,则存在 $n_0\geq 1$,当 $n\geq n_0$ 时对于任何 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\varepsilon\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\varepsilon}^-})\leqslant\eta_\lambda^-(\widetilde{E}_n)\leqslant\varepsilon/2,$$

及

$$\varepsilon\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\varepsilon}})\leqslant\eta_\lambda^+(\widetilde{E}_n)\leqslant\varepsilon/2.$$

这就意味着,当 $n\geq n_0$ 时,对于任何 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^-})\leqslant\varepsilon/2,$$

及

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^+})\leqslant\varepsilon/2.$$

从而,当 $n\geq n_0$ 时,对于任何 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^-})\leqslant\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda,\beta}^+})\leqslant\varepsilon.$$

事实上,如果存在 $\lambda_0\in(0,1]$,使得

$$\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda_0,\beta}^+})\nleqslant\varepsilon.$$

则存在 $\lambda\in(0,1]$,使得

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\beta}}) > \varepsilon.$$

当 $\lambda<\lambda_0$ 时，因为 $F^+_{\lambda_0,\beta}\subset F^+_{\lambda,\beta}$，所以，由 μ 的单调性，

$$\mu(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\beta}}) \leqslant \mu(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda,\beta}}),$$

从而

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\beta}}) \leqslant \mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda,\beta}}) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

矛盾！当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时，

$$\mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\beta}}) \leqslant \mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda_0,\beta}}) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

矛盾！从而，我们证明了，对于任何 $\lambda\in(0,1]$ 一致成立

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^-_{\lambda,\beta}}) = 0$$

和

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F^+_{\lambda,\beta}}) = 0.$$

定理 10.2.4 设 η 关于 $0\in R$ 具有 (SG) 性质，则

(1) 如果 μ 是上自连续的，则 η 也是上自连续的；

(2) 如果 μ 是下自连续的，则 η 也是下自连续的.

证明

(1) 设 $\widetilde{E},\widetilde{E}_n\in\mathscr{F}$，且 $(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)=0$.

(i) 如果 $\eta(\widetilde{E})=\widetilde{\infty}$，显然定理成立.

(ii) 如果 $\eta(\widetilde{E})=0$. 则由性质 9.2.3，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，$\alpha\in(0,\infty)$，我们有

$$\mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}) = \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}) = 0.$$

因此，由 μ 是上自连续的，我们有

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n) &= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in[0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-((\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),\\ &\qquad \sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^+((\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\Big]\\ &= \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^-((\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\cup(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})),\end{aligned}$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+((\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) \cup (\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}))]$$

$$= \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^-(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^-}),$$

$$\sup_{\alpha\in(0,\infty)} \alpha \wedge \mu_\lambda^+(\widetilde{E}_n \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})]$$

$$=\eta(\widetilde{E}_n) \to 0 = \eta(\widetilde{E}),(n \to \infty).$$

(iii) 我们假设 $0<\eta(\widetilde{E})\neq\widetilde{\infty}$和 a,b 是引理 10.2.1 中定义的.由 μ 是上自连续的,及引理 10.2.3,对于任意固定的 $\beta>0,\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^-((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^-}) = \lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^-})$$

和 (10.2.1)

$$\lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^+}) = \lim_{n\to\infty}\mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,\beta}^+}).$$

因此,我们选取 $n_0\geqslant1$,使得对于任何 $\alpha\geqslant M=\beta$(M 是引理 10.2.1 证明中所给出的)及 $\lambda\in(0,1]$一致成立

$$\mu_\lambda^-((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}}) \leqslant \mu_\lambda^-((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,M}})$$

$$\leqslant \mu_\lambda^-(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,M}^-}) + \frac{1}{2}b$$

$$<\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b,$$

及

$$\mu_\lambda^+((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+}) \leqslant \mu_\lambda^+((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,M}^+})$$

$$\leqslant \mu_\lambda^+(\widetilde{E} \cap \chi_{F_{\lambda,M}^+}) + \frac{1}{2}b$$

$$<\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b - b.$$

故,对于任何 $n\geqslant n_0$,我们有

$$\eta(\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda[\sup_{\alpha\in[2a,b]} \alpha \wedge \mu_\lambda^-((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}}),$$

$$\sup_{\alpha\in[2a,b]} \alpha \wedge \mu_\lambda^+((\widetilde{E} \cup \widetilde{E}_n) \cap \chi_{F_{\lambda,\alpha}^+})].$$

对于 a,b 像引理 10.2.2 一样，我们定义 $\eta_m^U(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)$ 和 $\eta_m^L(\widetilde{E}\cup E_n)$，则

$$\eta_m^L(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)\leqslant\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)$$
$$\leqslant\eta_m^U(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n),\quad m=1,2,\cdots,n\geqslant n_0.\qquad(10.2.2)$$

我们对 $\alpha_k(k=0,1,2,\cdots,m-1)$ 应用(10.2.1)，我们得到，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，一致成立

$$\lim_{n\to\infty}(\eta_m^U(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n))_\lambda^-=\max_{0\leqslant k\leqslant m-1}\alpha_{k+1}\wedge\mu_\lambda^-(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_k}})$$
$$=(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^-,$$

及

$$\lim_{n\to\infty}(\eta_m^L(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n))_\lambda^+=\max_{0\leqslant k\leqslant m-1}\alpha_{k-1}\wedge\mu_\lambda^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha_k}^+})$$
$$=(\eta_m^U(\widetilde{E}))_\lambda^+.$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_m^U(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)=\eta_m^U(\widetilde{E}).$$

同理可证

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_m^L(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)-\eta_m^L(\widetilde{E}).$$

因此，我们由引理 10.2.2 知，

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{E})&=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta_m^L(\widetilde{E})\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_m^L(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)\\&\leqslant(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_m^U(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)\\&=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta_m^U(\widetilde{E})\\&=\eta(\widetilde{E}).\end{aligned}$$

这就意味着

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)=\eta(\widetilde{E}).$$

(2) 设 $\widetilde{E},\widetilde{E}_n\in\mathscr{F}$ 且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)=0$

(i) 如果 $\eta(\widetilde{E})=0$,则由 η 的单调性,对于任何 $n\geqslant 1$,我们有

$$0\leqslant\eta(\widetilde{E}\cap\widetilde{E}_n^c)\leqslant\eta(\widetilde{E})=0,$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}\cap\widetilde{E}_n^c)=\eta(\widetilde{E}).$$

(ii) 如果 $\eta(\widetilde{E})=\widetilde{\infty}$. 则对于任何 $M>0$ 存在 $\lambda_0\in(0,1]$,使得

$$\eta_{\lambda_0}^+(\widetilde{E})\geqslant M.$$

从而,对于任何 $\alpha\in(0,\infty)$,有

$$M\leqslant\eta_{\lambda_0}^+(\widetilde{E})\leqslant\alpha\vee\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha}^+}).$$

由此可知对于任何 $0<\alpha_0<M$,有

$$\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+})\geqslant M.$$

故

$$\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+})=+\infty.$$

由$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)=0$,根据引理 10.2.3,对于任何固定的 $\alpha_0>0$ 及 $\lambda_0\in(0,1]$,我们有

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{E}_n\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+})=0.$$

再利用 μ 的下连续性,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}_n^c\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+}\cap\widetilde{E})=\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+})=+\infty.$$

故,存在 $N_{\alpha_0}>0$,当 $n\geqslant N_{\alpha_0}$时,

$$\mu_{\lambda_0}^+(\widetilde{E}\cap\widetilde{E}_n^c\cap\chi_{F_{\lambda_0,\alpha_0}^+})\geqslant M.$$

故

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}\cap\widetilde{E}_n^c)=\widetilde{\infty}=\eta(\widetilde{E}).$$

(iii) 如果 $0<\eta(\widetilde{E})\neq\widetilde{\infty}$. 类似(i-iii)可证.

定理 10.2.5 如果 μ 具有$(p.g.p)$性质,则 η 也具有

$(p.g.p)$性质.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$. 如果 $\eta(\widetilde{E})\vee\eta(\widetilde{F})<\delta$. 则我们类似引理 10.2.3,能够证明,对于任何固定的 $\alpha\geqslant\delta$,对于 $\lambda\in(0,1]$,有

$$\mu(\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})<\delta \quad 及 \quad \mu(\widetilde{F}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})<\delta.$$

从而,由 μ 具有$(p.g.p)$性质,我们有

$$\mu((\widetilde{E}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}})\cup(\widetilde{F}\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}))<\varepsilon.$$

同理可证

$$\mu((\widetilde{E}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\cup(\widetilde{F}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}}))<\varepsilon.$$

故

$$\begin{aligned}\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^-_\lambda((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F^-_{\lambda,\alpha}}),\\&\qquad\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu^+_\lambda((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})]\\&\leqslant\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda[\sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty]}\alpha\wedge\varepsilon,\sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\varepsilon]\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 10.2.6

(1) 如果 μ 是一致上自连续的,则 η 也是一致上自连续的;

(2) 如果 μ 是一致下自连续的,则 η 也是一致下自连续的.

证明

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\eta(\widetilde{F})<\delta$ 时,我们类似引理 10.2.3 可以证明,对于任意固定的 $\alpha\geqslant\delta,\lambda\in(0,1]$,我们有

$$\mu(\widetilde{F}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}})\leqslant\delta \quad 及 \quad \mu(\widetilde{F}\cap\chi_{F^+_{\lambda,\alpha}})\leqslant\delta.$$

我们取 $\delta\leqslant\varepsilon$. 我们只要证明对于任何 $\widetilde{E}\in\mathscr{F}$,

$$\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\eta(\widetilde{E})+\varepsilon$$

即可. 事实上,如果 $\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\varepsilon$,则由 $\eta(\widetilde{E})\geqslant0$ 知

$$\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\eta(\widetilde{E})+\varepsilon.$$

如果 $\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\not\leqslant\varepsilon$. 则一定存在 $\lambda_0\in(0,1]$，使得

$$\eta_{\lambda_0}^{+}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})>\varepsilon.$$

我们记

$$A=\{\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F});\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})>\varepsilon$$

或

$$\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{+}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})>\varepsilon,\lambda\in(0,1]\}$$

$$B=\{\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F});\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\varepsilon$$

或

$$\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{+}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\varepsilon,\lambda\in(0,1]\}.$$

对于任何 $\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\in A$，如果 $\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})$，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})&=\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\\&=\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^{-}((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})\\&\leqslant\varepsilon\vee\sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^{-}((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})\\&\leqslant\varepsilon\vee\sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge(\mu_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})+\varepsilon)\\&\leqslant\varepsilon\vee(\sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})+\varepsilon)\\&\leqslant\sup_{\alpha\in(0,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda(\widetilde{E}\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{-}})+\varepsilon\\&=\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E})+\varepsilon.\end{aligned}$$

同理可以证明，如果 $\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{+}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})$，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})&\leqslant\varepsilon\vee\sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty)}\alpha\wedge\mu_\lambda^{+}((\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\cap\chi_{F_{\lambda,\alpha}^{+}})\\&\leqslant\eta_\lambda^{+}(\widetilde{E})+\varepsilon.\end{aligned}$$

对于 $\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\in B$，如果 $\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})$，我们有

$$\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\varepsilon\leqslant\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E})+\varepsilon.$$

如果 $\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})=\eta_\lambda^{+}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})$，我们有

$$\underline{\eta}_\lambda(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\varepsilon\leqslant\eta_\lambda^{+}(\widetilde{E})+\varepsilon.$$

结合上述证明，对于任何 $\lambda\in(0,1]$，我们有

$$\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\eta_\lambda^{-}(\widetilde{E})+\varepsilon,$$

及

$$\eta_\lambda^+(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\eta_\lambda^+(\widetilde{E})+\varepsilon.$$

故

$$\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{F})\leqslant\eta(\widetilde{E})+\varepsilon.$$

(2) 同理可证.

定理 10.2.7 设$\{\mu_m\}$是一致基本列,且对于任何$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$,$\left\{\int_{\widetilde{A}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_n\right\}\in A^*$,$\eta_m$关于$0\in R$具有$(SG)$性质,则

(1) 如果$\mu_m(m=1,2,\cdots)$是上自连续的,则存在η,使得

$$\eta(\widetilde{E})=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_m,$$

且η是上自连续的;

(2) 如果$\mu_m(m=1,2,\cdots)$是下自连续的,则存在η,使得

$$\eta(\widetilde{E})=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\int_{\widetilde{E}}\widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu_m,$$

且η是下自连续的.

证明

(1) 由定理 10.1.6 知$\{\eta_m\}$是$\mathscr{F}$上的一致基本的.所以,由命题 10.1.3,存在η,使得

$$\eta(\widetilde{E})=(\widetilde{\rho})\lim_{m\to\infty}\eta_m(\widetilde{E}),$$

且在$\mathscr{F}$上一致成立.我们任取$\widetilde{E}\in\mathscr{F}$,$\{\widetilde{E}_n\}\subset\mathscr{F}$且$(\widetilde{\rho})\lim\limits_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}_n)=0$.所以,对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n\geqslant N$时,

$$\widetilde{\rho}(0,\eta(\widetilde{E}_n))<\varepsilon.$$

又由于$\{\eta_m\}$在$\mathscr{F}$上一致收敛于η,对于上述$\varepsilon>0$,存在$M>0$,当$m\geqslant M$时,对于任何$\widetilde{A}\in\mathscr{F}$成立

$$\widetilde{\rho}(\eta_m(\widetilde{A}),\eta(\widetilde{A}))<\varepsilon.$$

这样

$$\widetilde{\rho}(\eta_m(\widetilde{E}_n),0)\leqslant\widetilde{\rho}(\eta_m(\widetilde{E}_n),\eta(\widetilde{E}_n))+\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{E}_n),0)\leqslant 2\varepsilon.$$

故,当$m\geqslant M$时

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta_m(\widetilde{E}_n)=0.$$

再由定理 10.2.4 知 η_m 是上自连续的. 则对于上述 $\varepsilon>0$, 存在 $N_{M+1}>0$, 当 $n>N_{M+1}$时,

$$\widetilde{\rho}(\eta_{M+1}(\widetilde{E}_n\cup\widetilde{E}),\eta_{M+1}(\widetilde{E}))<\varepsilon.$$

故

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n),\eta(\widetilde{E}))\\
\leqslant&\widetilde{\rho}(\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n),\eta_{M+1}(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)+\widetilde{\rho}(\eta_{M+1}(\widetilde{E}+\widetilde{E}_n),\eta_{M+1}(\widetilde{E}))\\
&+\widetilde{\rho}(\eta_{M+1}(\widetilde{E}),\eta(\widetilde{E}))\\
<&\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就意味着

$$(\widetilde{\rho})\lim_{n\to\infty}\eta(\widetilde{E}\cup\widetilde{E}_n)=\eta(\widetilde{E}).$$

(2) 类似可证.

参 考 文 献

1 Halmos P R., Measure theory. Van Nastrand, New York, 1967

2 Wang Z and Klir G J., Fuzzy Measure Theory. Pleum Press, New York, 1992

3 张广全. 模糊测度论. 贵州科技出版社,1994

4 张文修. 模糊数学基础. 西安交通大学出版社,1986

5 Butnariu D. Additive fuzzy measures and integrals Ⅰ, J. Math. Anal. Appl. 93(1983). 436～452

6 Butnariu D. Additive fuzzy measures and integrals Ⅱ, J. Math. Anal. Appl. inpress.

7 Butnariu D. Additive fuzzy measures and integrals Ⅲ, J. Math. Anal. Appl. 125(1987). 288～303

8 Butnariu D. Fuzzy measurablity and integrability, J. Math. Anal. Appl. 117(1986). 385～410

9 Butnariu D. Decomposition and range for additive fuzzy measure, Fuzzy sets and Systems 10(1983) 135～155

10 Zhang Guangquan. Fuzzy limit theory of fuzzy numbers, R. Trappl. Ed., Cybernetics and Systems'90 (World Scientific, Singapore, 1990) 163～170

11 Zhang Guangquan. Fuzzy continuous function and its properties, Fuzzy Sets and Systems 43(1991) 159～171

12 Zhang Guangquan. Fuzzy number-valued fuzzy measure and fuzzy number-valued fuzzy integral on the fuzzy set, Fuzzy

Sets and Systems 49(1992) 357～376

13 Zhang Guangquan. The structural characteristics of the fuzzy number-valued fuzzy measure on the fuzzy σ-algebra and their applications, Fuzzy Sets and Systems 52(1992) 69～81

14 Zhang Guangquan. Convergence of a sequence of fuzzy number-valued fuzzy measurable function on the fuzzy number-valued fuzzy measure space, Fuzzy sets and Systems 57 (1993)75～84

15 Zhang Guangquan. The convergence for a sequence of fuzzy integrals of fuzzy number-valued function on the fuzzy set, Fuzzy sets and Systems 59(1993)43～57

16 Zhang Guangquan. On fuzzy number-valued fuzzy measures defined by fuzzy number-valued fuzzy integrals on the fuzzy set I ,Fuzzy Sets and Systems 45(1992)227～237

17 Zhang Guangquan. On fuzzy number-valued fuzzy measures defined by fuzzy number-valued fuzzy integrals on the fuzzy set II ,Fuzzy Sets and Systems 48(1992) 257～265

18 Zhang Guangquan. fuzzy number-valued fuzzy integral of fuzzy number-valued function with respect to fuzzy number-valued fuzzy measure on the fuzzy set, R. Trappl. Ed., Cybernetics and Systems'92 (World Scientific, Singapore, 1992)

19 Zhang Guangquan. The autocontinuity of the fuzzy number-valued fuzzy measure, Advancement of Fuzzy Theory and Systems in China and Japan (International Academic Publishers, 1990)

20 张广全．模糊值模糊积分的一些等价定义.模糊系统与数学

增刊(1994)
21 张广全．模糊值函数关于模糊值模糊测度的模糊值模糊积分的一些性质，河北大学学报 1(1994)
22 翟建仁，张广全．模糊集合上的模糊值模糊测度扩张，河北大学学报 2(1992)
23 Liu Xuecheng and Zhang Guangquan, Lattice-valued fuzzy measure and lattice-valued fuzzy integral, Fuzzy Sets and Systems 62(1994) 312～332
24 Ji Aibing and Zhang Guangquan, Extension of additive
25 Miao Shushi and Zhang Guangquan, Extension of fuzzy number-valued measure on the fuzzy set, 已投 Fuzzy Sets and Systems
26 Miao Shushi and Zhang Guangquan, Convergence of a sequence of fuzzy number-valued measurable function on the fuzzy number-valued measure space, 已投 Fuzzy Sets and Systems
27 Liu Yaping and Zhang Guangquan, Fuzzy number-valued integral with respect to fuzzy number-valued measure on the fuzzy set, 已投 The J. of Fuzzy Mathematics
28 Liu Yaping and Zhang Guangquan, Fuzzy number-valued integral of the non-negative fuzzy number-valued B-function on the fuzzy set, 已投 Fuzzy Sets and System
29 Zhao Fenxia and Zhang Guangquan, Hahn and Jordan decompostions of signed fuzzy number-valued measure on the fuzzy set, 已投 Fuzzy Sets and Systems
30 Zhao Fenxia and Zhang Guangquan, Lebesgue decompositions of signed fuzzy number-valued and Radon-Nikodym theorems for fuzzy number-valued integrals on the fuzzy

set，已投 Fuzzy Sets and Systems

31 Qingshan etc. ,Propenty (P.G.P) of fuzzy measure and convergence in measure, The J. of Fuzzy Math. 3(1995) 699～710